

Preprint No. M 09/36

Fourier-Reihen, π und Cotangens

Neundorf, Werner

November 2009

Impressum:

Hrsg.: Leiter des Instituts für Mathematik
Weimarer Straße 25
98693 Ilmenau
Tel.: +49 3677 69 3621
Fax: +49 3677 69 3270
<http://www.tu-ilmenau.de/ifm/>

ISSN xxxx-xxxx

ilmedia

Technische Universität Ilmenau
Fakultät für Mathematik
und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

<http://www.tu-ilmenau.de/math/>

Postfach 10 05 65
D - 98684 Ilmenau
Germany
Tel.: 03677/69 3267
Fax: 03677/69 3272
Telex: 33 84 23 tuil d.
email: werner.neundorf@tu-ilmenau.de

Preprint No. M 36/09

Fourier-Reihen, π und Cotangens

Werner Neundorf

November 2009

[‡]MSC (2000): 42-XX, 42A16, 42A20, 42B05, 11Y60

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Anwendungen der Fourier-Analyse im Zusammenhang mit der Berechnung der Kreiszahl π sowie der Cotangens-Funktion behandelt. Weiterhin werden zahlreiche Funktionen mit ihren Fourier-Reihen vorgestellt und graphische Darstellungen der Funktionen mit ausgewählten Fourier-Polynomen gezeigt.

Berechnungen und Plots erfolgen unter Verwendung des Computeralgebrasystems Maple.

Aus der immensen Fülle des Angebots auf diesem Gebiet, das auch im Internet problemlos auffindbar ist und zur Verfügung steht, wird hier nur eine subjektive Auswahl getroffen.

Johann Wolfgang von Goethe

Ich denke immer,
wenn ich einen Druckfehler sehe,
es sei etwas Neues erfunden.

Die Wissenschaft wird dadurch sehr zurückgehalten,
daß man sich abgibt mit dem was nicht wissenschaftlich,
und mit dem was nicht wißbar ist.

Inhaltsverzeichnis

1	Fourier-Reihen und Anwendungen	1
1.1	Formeln zur Fourier-Reihe	1
1.2	Fourier-Reihen und Kreiszahl π	2
1.2.1	Rechteckschwingung	2
1.2.2	Kippschwingung	4
1.2.3	Dreiecksschwingung	6
1.2.4	Summe der Kehrwerte von Quadratzahlen	8
1.2.5	Gleichgerichteter Sinus	10
1.2.6	Formelübersicht	12
1.3	Anwendung für die Partialbruchzerlegung des Cotangens	14
2	Sammlung von Fourier-Reihen	16
	Literaturverzeichnis	39

Kapitel 1

Fourier-Reihen und Anwendungen

1.1 Formeln zur Fourier-Reihe

Die Fourier-Reihenentwicklung einer Funktion kann geschickt für die Berechnung von mathematischen Konstanten und in anderen Zusammenhängen verwendet werden. Dazu in kurzer Version die Konstruktion der Fourier-Reihe.

Sei $f(x)$ eine 2π -periodische hinreichend glatte Funktion mit dem Periodizitätsintervall $[-\pi, \pi]$. Dann notiert man diese auf der Grundlage des orthonormalen Systems der trigonometrischen Polynome

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(2x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(2x), \dots \quad (1.1)$$

als unendliche bzw. endliche Funktionenreihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)], \quad f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad (1.2)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = (0,)1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

Nehmen wir die Parsevalsche Gleichung als Beziehung zwischen f und der Folge ihrer Fourier-Koeffizienten $\alpha_i = (f, \varphi_i)$ in der Form

$$\|f\|_{2,1}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2, \quad \|f_n\|_{2,1}^2 = \sum_{i=0}^n \alpha_i^2, \quad (1.4)$$

dann gilt mit den Fourier-Koeffizienten a_k, b_k analog zum Lehrsatz von Pythagoras

$$\|f\|_{2,1}^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right), \quad \|f_n\|_{2,1}^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right). \quad (1.5)$$

1.2 Fourier-Reihen und Kreiszahl π

Dazu betrachten wir einfache Beispiele von reellen Fourier-Reihen für 2π -periodische Funktionen. Von der Ausgangsfunktion bilden wir jeweils die periodische Fortsetzung. Eine Formel mit der Kreiszahl wird möglich z. B. mit der Besselschen Gleichung, wo sowohl die Integration von f^2 im Intervall als auch die Berechnung der Fourier-Koeffizienten für einfache Integranden unmittelbar die Größe π ins Spiel bringt.

1.2.1 Rechteckschwingung

Wir wenden die Formeln auf die Rechteckschwingung, Rechteckimpuls, Rechteckpuls oder Sprungfunktion im Intervall $[0, 2\pi]$ an.

$$f(x) = \text{sign}(\sin(x)) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 < x < \pi, \\ -1, & \text{falls } \pi < x < 2\pi, \\ 0, & \text{falls } x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad f(x) = f(x + 2\pi). \quad (1.6)$$

Natürlich kann man als Periodenintervall auch $[-\pi, \pi]$ nehmen.

Die periodische Fortsetzung von $f(x)$ auf $[Ia, Ib]$, $T = Ib - Ia$, erfolgt in Maple mittels `f(x-T*floor((x-Ia)/T))`.

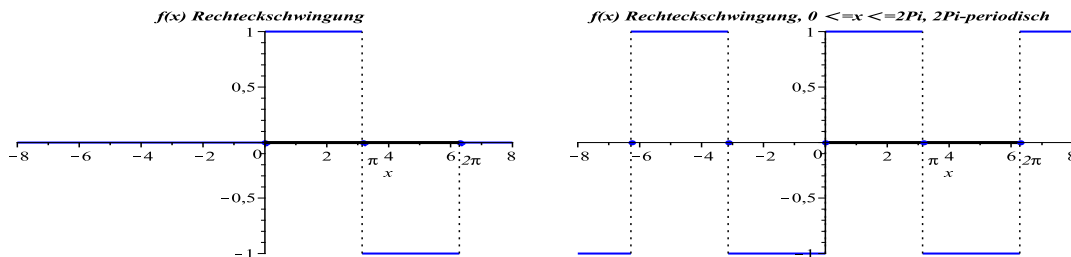


Abb. 1.1 $f(x)$ Rechteckschwingung, $x \in [0, 2\pi]$, $f(x)$ ist 2π -periodisch

Zur Auswertung der Fourier-Koeffizienten (1.3) zerlegen wir das Integrationsintervall in zwei Hälften, auf denen jeweils die Stammfunktionen und somit die Teilintegrale bestimmt werden. Die Koeffizienten a_k als Flächen sind alle Null wegen der Symmetrie von $\cos(kx)$ - ist eine gerade Funktion - und Asymmetrie von $f(x)$ zum Nullpunkt - ist eine ungerade Funktion. Für die anderen Koeffizienten erhält man, ebenfalls bei Beachtung der Symmetrieeigenschaften

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \sin(kx) dx + \int_0^{\pi} (+1) \sin(kx) dx \right] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx, \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{-\cos(k\pi) + 1}{k} = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \frac{4}{k\pi}, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die gesuchte Fourier-Reihe $f(x)$ ist natürlich eine ungerade Funktion, die zugehörigen Fourier-Polynome seien $f_n(x)$.

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}, \quad f_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}. \quad (1.7)$$

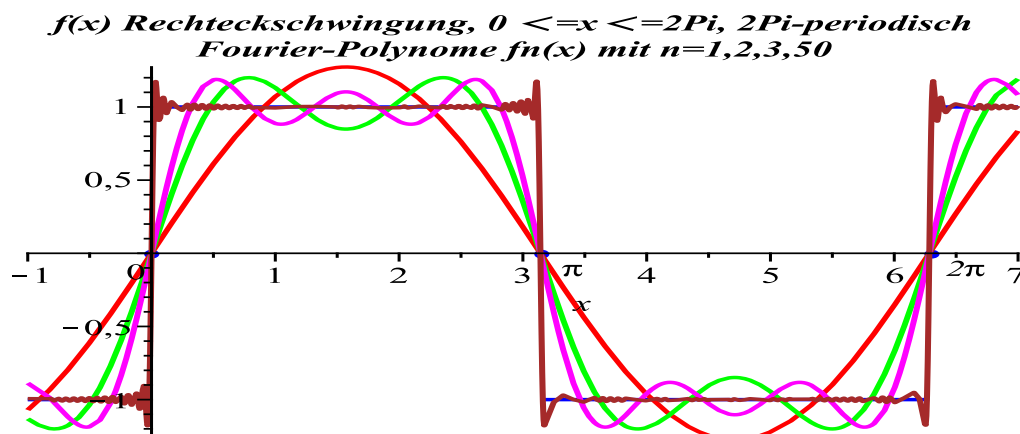


Abb. 1.2 $f(x)$ Rechteckschwingung, $x \in [0, 2\pi]$, $f(x)$ ist 2π -periodisch, sowie Fourier-Polynome $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, 50$

Nach der Parsevalschen Gleichung bzw. dem Satz von Pythagoras haben wir

$$\|f\|_{2,1}^2 = (f, f) = \int_0^{2\pi} 1^2 dx = 2\pi = \pi \left[\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 + \left(\frac{4}{5\pi}\right)^2 + \dots \right]$$

und als Nebeneffekt der Fourier-Reihenentwicklung die Zahlenreihe für $\frac{\pi^2}{8}$ bzw. π^2

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}. \quad (1.8)$$

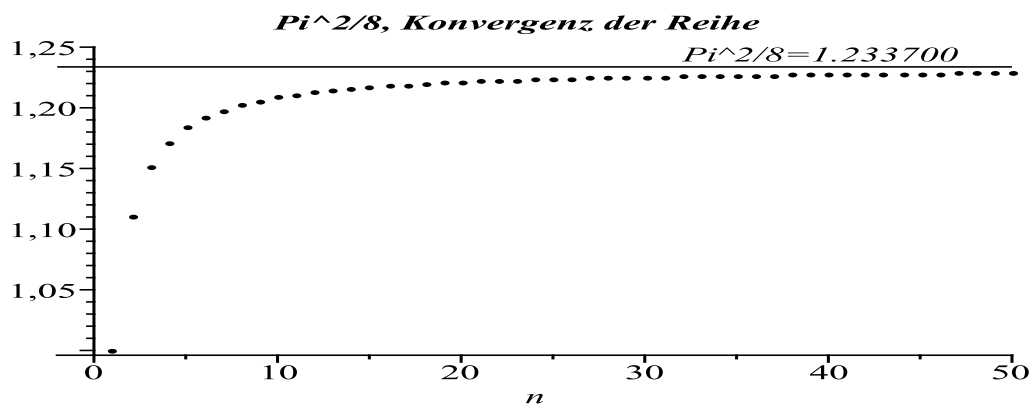


Abb. 1.3 $\pi^2/8$ sowie $\varphi_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}$, $n = 1, 2, \dots, 50$

1.2.2 Kippschwingung

Man bezeichnet diese auch als Sägezahnimpuls oder Sägezahnimpuls (steigend)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } -\pi < x < \pi, \\ 0, & \text{falls } x = \pm\pi, \end{cases} \quad f(x) = f(x + 2\pi). \quad (1.9)$$

Die periodische Fortsetzung von $f(x)$ auf $[Ia, Ib]$, $T = Ib - Ia$, erfolgt in Maple mittels `f(x-T*floor((x-Ia)/T))`.

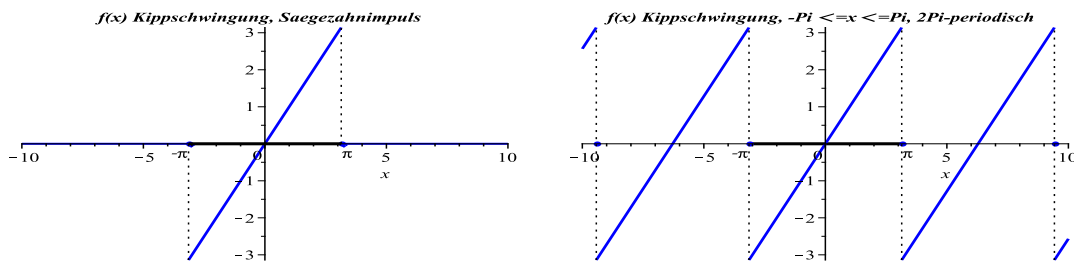


Abb. 1.4 $f(x)$ Kippschwingung, $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x)$ ist 2π -periodisch

Zur Auswertung der Fourier-Koeffizienten (1.3) bemerken wir, dass $f(x)$ eine ungerade Funktion ist und damit die Fourier-Koeffizienten a_k verschwinden. Somit bleibt nur die Berechnung der Koeffizienten b_k , bei Beachtung von Symmetrieeigenschaften.

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(kx) - kx \cos(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi \cos(k\pi)}{k} \right) \\ &= (-1)^{k+1} \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Die gesuchte Fourier-Reihe ist somit

$$f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k} \quad (1.10)$$

und natürlich eine ungerade Funktion. Die zugehörigen Fourier-Polynome seien

$$f_n(x) = 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

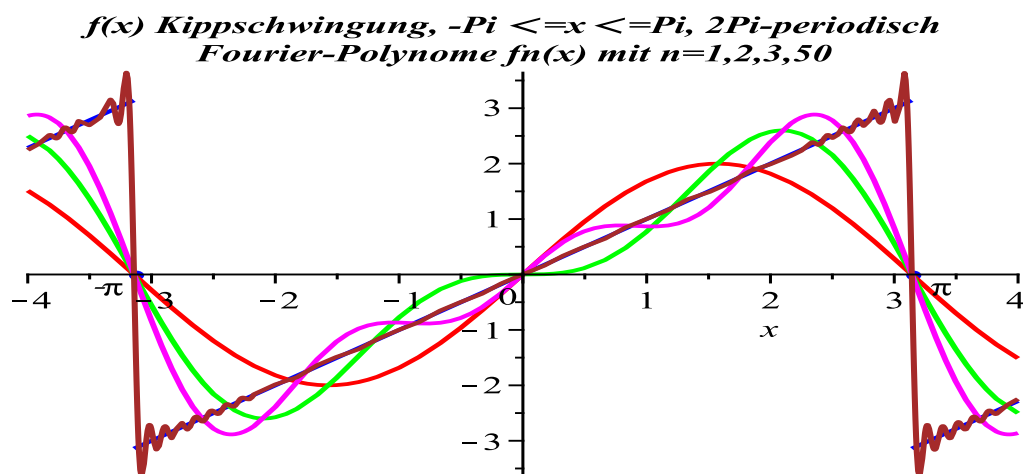


Abb. 1.5 $f(x)$ Kippschwingung, $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x)$ ist 2π -periodisch, sowie Fourier-Polynome $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, 50$

Die Auswertung der Fourier-Reihe an der Stelle $x = \pi/2$ liefert

$$\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(k\pi/2)}{k}$$

und somit

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(k\pi/2)}{k} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots \quad (1.11)$$

Dies ist die bekannte Reihe von G.W. LEIBNIZ.

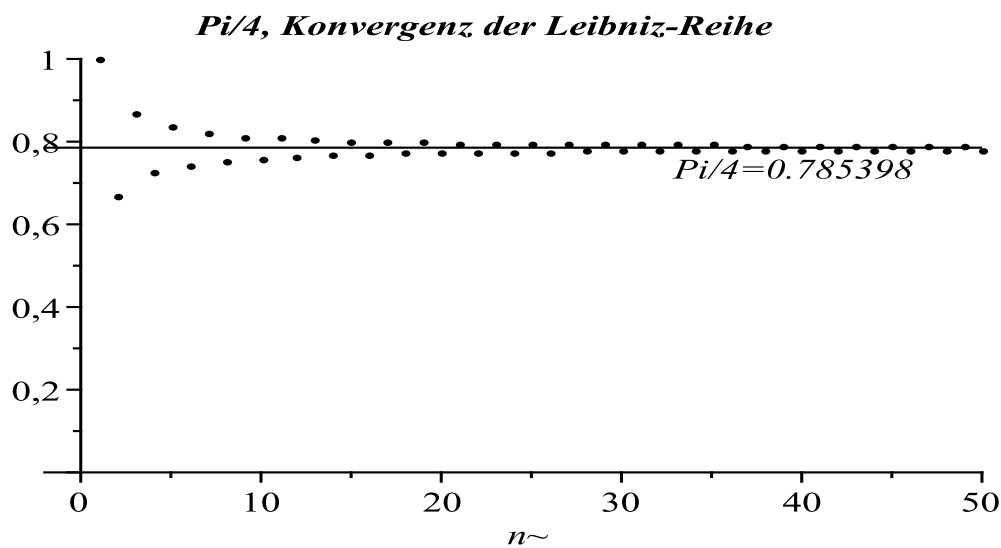


Abb. 1.6 $\pi/4$ sowie $\varphi_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\sin(k\pi/2)}{k}$, $n = 1, 2, \dots, 50$

1.2.3 Dreiecksschwingung

Die Dreiecksschwingung bzw. Dreieckspuls hat ebenfalls die Form eines Sägezahnimpulses und lautet

$$f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x) = f(x + 2\pi). \quad (1.12)$$

Die periodische Fortsetzung von $f(x)$ auf $[Ia, Ib]$, $T = Ib - Ia$, erfolgt in Maple mittels `f(x-T*floor((x-Ia)/T))`.

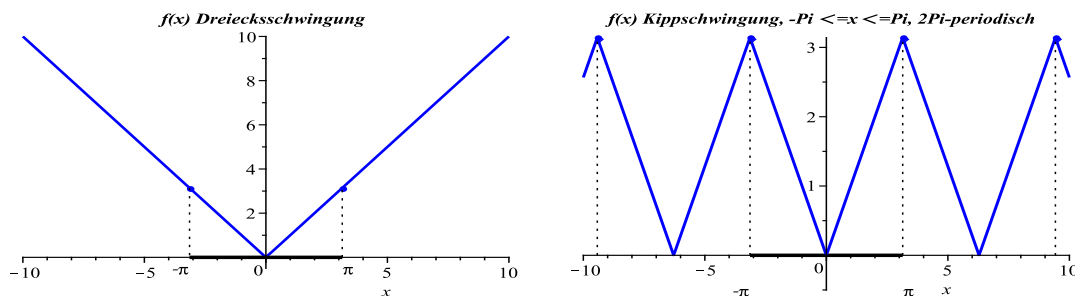


Abb. 1.7 $f(x)$ Dreiecksschwingung, $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x)$ ist 2π -periodisch

Zur Auswertung der Fourier-Koeffizienten (1.3) bemerken wir, dass $f(x)$ eine gerade Funktion ist und damit die Fourier-Koeffizienten b_k verschwinden. Somit bleibt nur die Berechnung der Koeffizienten a_k , bei Beachtung von Symmetrieeigenschaften.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(kx) + kx \sin(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos(k\pi) - 1}{k^2} \right) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die gesuchte Fourier-Reihe ist somit

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} \quad (1.13)$$

und natürlich eine gerade Funktion. Die zugehörigen Fourier-Polynome seien

$$f_n(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}.$$

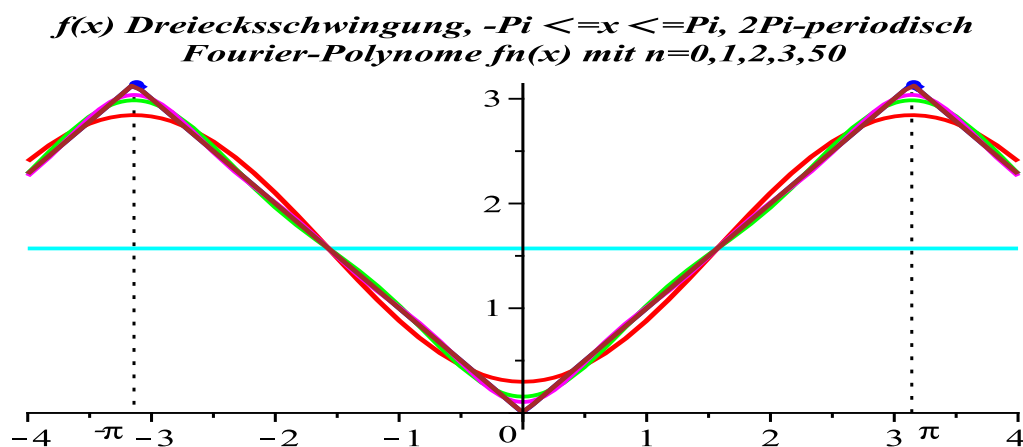


Abb. 1.8 $f(x)$ Dreiecksschwingung, $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x)$ ist 2π -periodisch, sowie Fourier-Polynome $f_n(x)$, $n = 0, 1, 2, 3, 50$

Die Auswertung der Fourier-Reihe an der Stelle $x = 0$ liefert

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

und somit durch Multiplikation mit $-\pi/4$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \quad (1.14)$$

Dies ist die bekannte Reihe der Kehrwerte der Quadrate der ungeraden natürlichen Zahlen, wie sie auch bei der Rechteckschwingung aufgetreten ist.

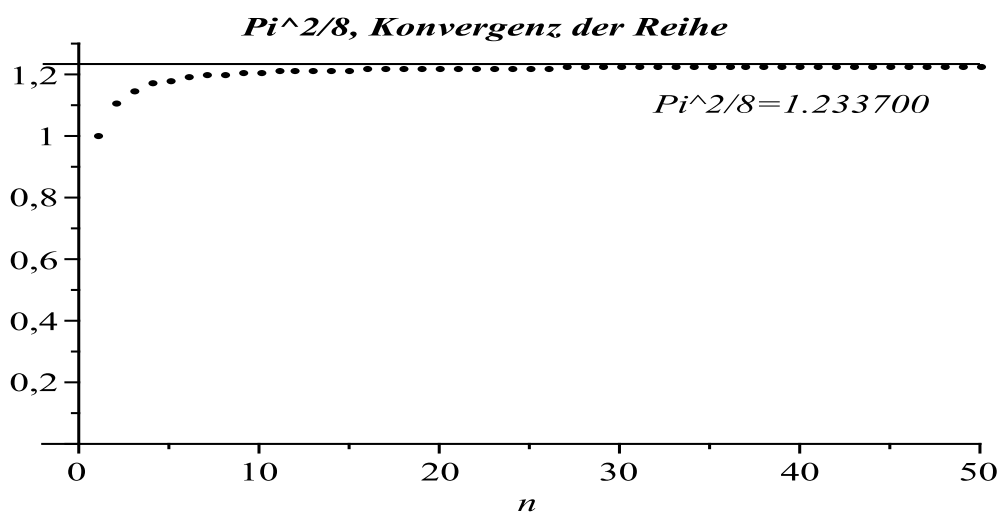


Abb. 1.9 $\pi^2/8$ sowie $\varphi_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}$, $n = 1, 2, \dots, 50$

1.2.4 Summe der Kehrwerte von Quadratzahlen

Die bekannteste π -Formel erhält man aus der Fourier-Reihe für

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x) = f(x + 2\pi). \quad (1.15)$$

Die periodische Fortsetzung von $f(x)$ auf $[Ia, Ib]$, $T = Ib - Ia$, erfolgt in Maple mittels `f(x-T*floor((x-Ia)/T))`.

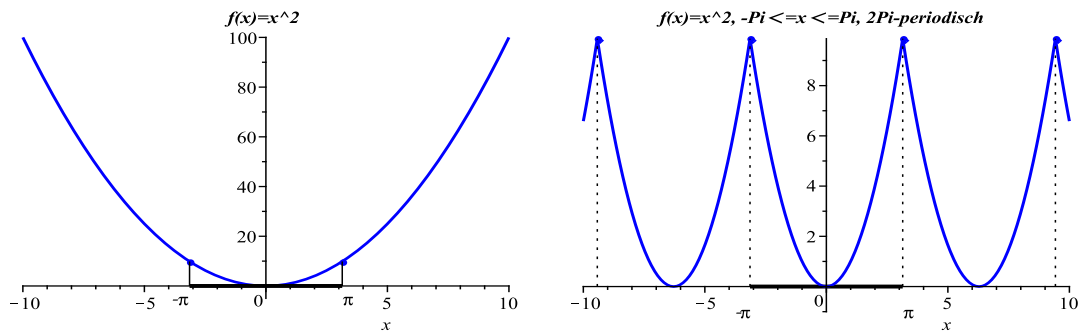


Abb. 1.10 $f(x)$ Dreiecksschwingung, $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x)$ ist 2π -periodisch

Zur Auswertung der Fourier-Koeffizienten (1.3) bemerken wir, dass $f(x)$ eine gerade Funktion ist und damit die Fourier-Koeffizienten b_k verschwinden. Somit bleibt nur die Berechnung der Koeffizienten a_k , bei Beachtung von Symmetrieeigenschaften.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{2x}{k^2} \cos(kx) + \left(\frac{x^2}{k} - \frac{2}{k^3} \right) \sin(kx) \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left((-1)^k \frac{2\pi}{k^2} \right) = (-1)^k \frac{4}{k^2}. \end{aligned}$$

Die gesuchte Fourier-Reihe ist somit

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx) \quad (1.16)$$

und natürlich eine gerade Funktion. Die zugehörigen Fourier-Polynome seien

$$f_n(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx).$$

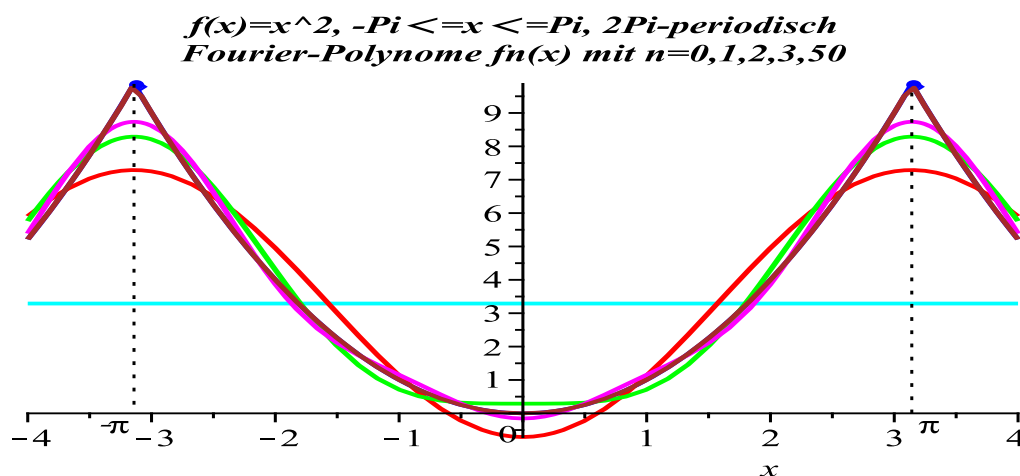


Abb. 1.11 $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi], f(x)$ ist 2π -periodisch, sowie Fourier-Polynome $f_n(x), n = 0, 1, 2, 3, 50$

Die Auswertung der Fourier-Reihe an der Stelle $x = 0$ liefert

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}$$

und somit

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}. \quad (1.17)$$

Das ist die alternierende Reihe der Kehrwerte der Quadrate der natürlichen Zahlen.

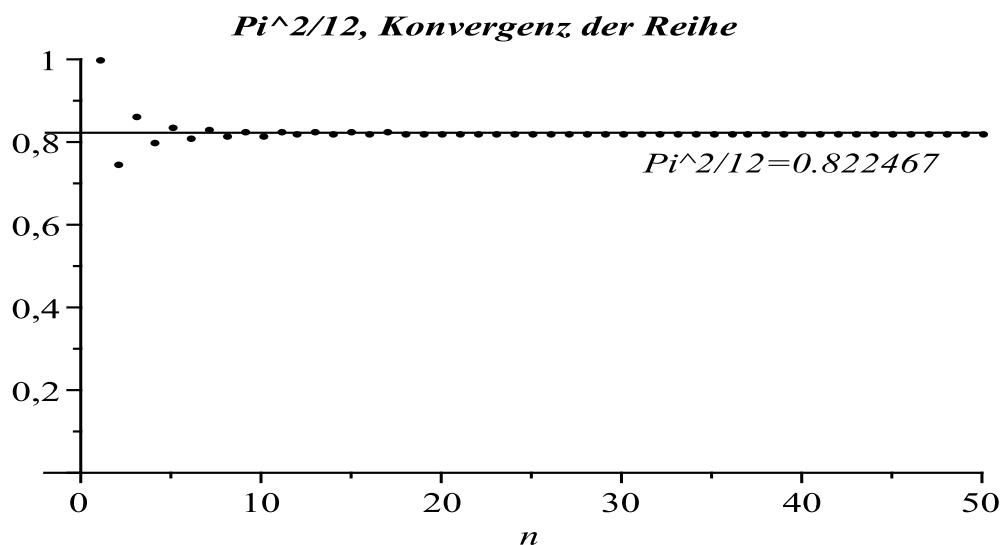


Abb. 1.12 $\pi^2/12$ sowie $\varphi_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}, n = 1, 2, \dots, 50$

1.2.5 Gleichgerichteter Sinus

Der gleichgerichtete Sinus bzw. Sinuspuls ist

$$f(x) = |\sin(x)|, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x) = f(x + 2\pi). \quad (1.18)$$

Die periodische Fortsetzung von $f(x)$ auf $[Ia, Ib]$, $T = Ib - Ia$, erfolgt in Maple mittels `f(x-T*floor((x-Ia)/T))`.

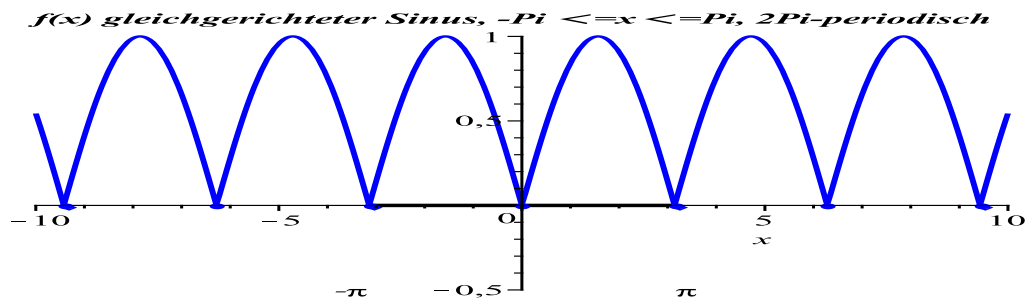


Abb. 1.13 $f(x)$ gleichgerichteter Sinus, $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x)$ ist 2π -periodisch

Zur Auswertung der Fourier-Koeffizienten (1.3) bemerken wir, dass $f(x)$ eine gerade Funktion ist und damit die Fourier-Koeffizienten b_k verschwinden. Somit bleibt nur die Berechnung der Koeffizienten a_k , bei Beachtung von Symmetrieeigenschaften.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) dx = \frac{4}{\pi}, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos((k-1)x)}{k-1} - \frac{\cos((k+1)x)}{k+1} \right]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k + 1}{k^2 - 1} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ -\frac{4}{\pi} \frac{1}{(k-1)(k+1)}, & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die gesuchte Fourier-Reihe ist somit

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{(2k-1)(2k+1)} \right] \quad (1.19)$$

und natürlich eine gerade Funktion. Die zugehörigen Fourier-Polynome seien

$$f_n(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{\cos(2kx)}{(2k-1)(2k+1)} \right].$$

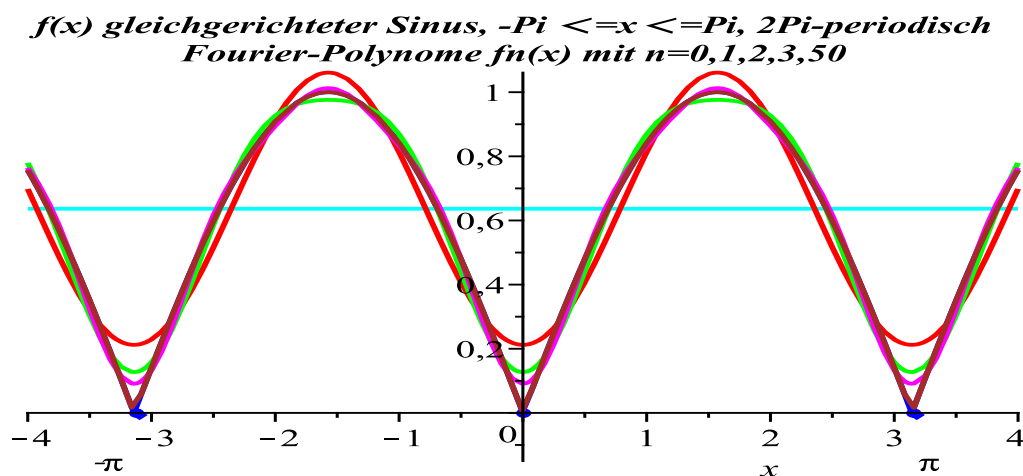


Abb. 1.14 $f(x)$ gleichgerichteter Sinus, $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x)$ ist 2π -periodisch, sowie Fourier-Polynome $f_n(x)$, $n = 0, 1, 2, 3, 50$

Die Auswertung der Fourier-Reihe an der Stelle $x = \pi/2$ liefert

$$1 = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k+1)} \right].$$

und nach Umstellung

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} \mp \dots \quad (1.20)$$

Dies ist eine weitere Formel für $\pi/4$.

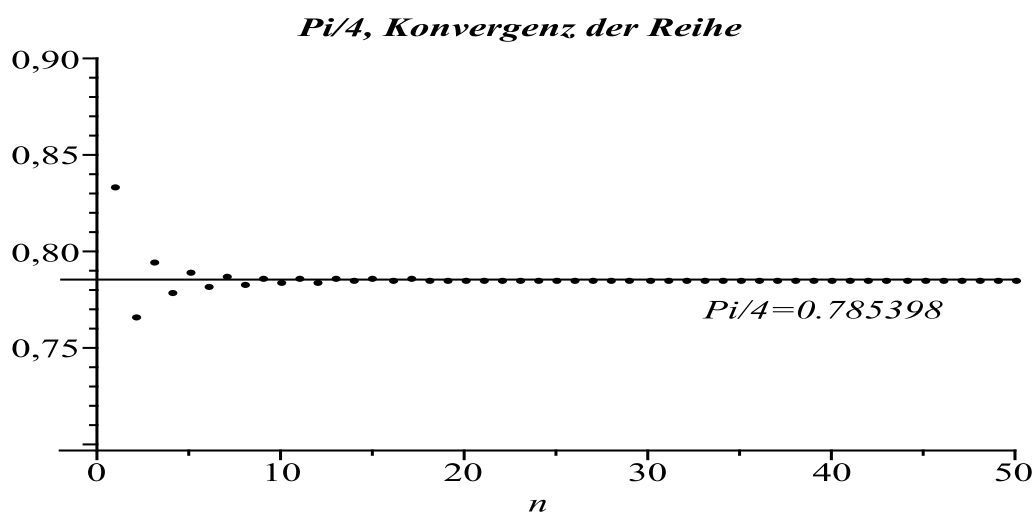


Abb. 1.15 $\pi/4$ sowie $\varphi_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)(2k+1)}$, $n = 1, 2, \dots, 50$

1.2.6 Formelübersicht

Wir kombinieren (subtrahieren) und vereinfachen nun die π^2 -Formeln (1.8) aus der Rechteckschwingung/Dreiecksschwingung sowie (1.17) aus der Reihe für $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi^2}{8} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots, \\
 \frac{\pi^2}{12} &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} \pm \dots, \\
 \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{12} &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots, \\
 \frac{\pi^2}{24} &= \frac{1}{2^2 \cdot 1^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} + \dots, \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right), \\
 \frac{\pi^2}{6} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots.
 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir Formeln für die Summen der Kehrwerte der Quadratzahlen bzw. der Quadrate aller geraden und ungeraden natürlichen Zahlen

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots, \\
 \frac{\pi^2}{24} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots, \\
 \frac{\pi^2}{8} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots.
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Notieren wir noch einige interessante Zahlenreihen in Verbindung mit π^k -Formeln, jedoch ohne zu überprüfen, ob und wie eventuell die Ergebnisse mit einer Fourier-Reihenentwicklung zusammenhängen.

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{8} &= \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{7 \cdot 9} - \frac{1}{11 \cdot 13} - \dots, \\
 \frac{\pi}{4} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \mp \dots, \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right) = \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{5^2} \right) \left(1 - \frac{1}{7^2} \right) \cdot \dots, \\
 \frac{2}{\pi} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n)^2} \right) = \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) \left(1 - \frac{1}{6^2} \right) \cdot \dots,
 \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 9} \pm \dots,$$

$$(1 + \sqrt{2}) \frac{\pi}{16} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(8n-1)(8n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{7 \cdot 9} - \frac{1}{15 \cdot 17} - \frac{1}{23 \cdot 25} - \dots,$$

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1} = \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} \pm \dots,$$

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = -\frac{1}{3} \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2} = -\frac{1}{3} \ln(2) + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} \pm \dots,$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{12\sqrt{3}} &= \frac{1}{4} \ln(3) - \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)(3n+4)} \\ &= \frac{1}{4} \ln(3) - \frac{1}{6} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} + \dots, \end{aligned}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \binom{2n}{n}},$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(n+1)^2} = \ln(2) + \frac{1}{2^2} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} - \frac{4}{5^2} \pm \dots,$$

$$\frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{35^2} + \dots,$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} \pm \dots,$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \dots,$$

$$\frac{\pi^4}{96} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots,$$

$$\frac{5\pi^5}{1536} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^5} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} \pm \dots.$$

1.3 Anwendung für die Partialbruchzerlegung des Cotangens

Betrachten wir die Funktion $f(x) = \cos(cx)$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, die auf $[-\pi, \pi]$ definiert und darüber hinaus 2π -periodisch fortgesetzt sei.

Die periodische Fortsetzung von $f(x)$ auf $[Ia, Ib]$, $T = Ib - Ia$, erfolgt in Maple mittels `f(x-T*floor((x-Ia)/T))`.

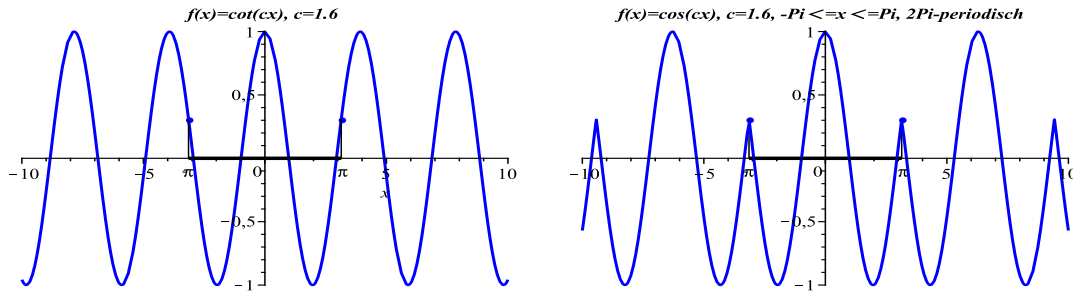


Abb. 1.16 $f(x) = \cos(cx)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x)$ ist 2π -periodisch

Da f eine gerade Funktion ist, verschwinden alle Fourier-Koeffizienten b_k . Für die anderen Fourier-Koeffizienten a_k erhält man

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(cx) \cos(kx) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((k+c)x) - \cos((k-c)x)] dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin((k+c)x)}{k+c} + \frac{\sin((k-c)x)}{k-c} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin((k+c)\pi)}{k+c} + \frac{\sin((k-c)\pi)}{k-c} \right].
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Berücksichtigt man das Additionstheorem $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$ sowie $\sin(k\pi) = 0$, $\cos(k\pi) = (-1)^k$, so bekommt man nach Zusammenfassen der Brüche

$$a_k = \frac{1}{\pi} (-1)^k \sin(\pi c) \frac{2c}{c^2 - k^2}. \tag{1.23}$$

Daraus folgt die Darstellung

$$f(x) = \cos(cx) = \frac{\sin(\pi c)}{\pi} \left[\frac{1}{c} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(kx) \frac{2c}{c^2 - k^2} \right] \tag{1.24}$$

und das zugehörige Fourier-Polynom $f_n(x)$.

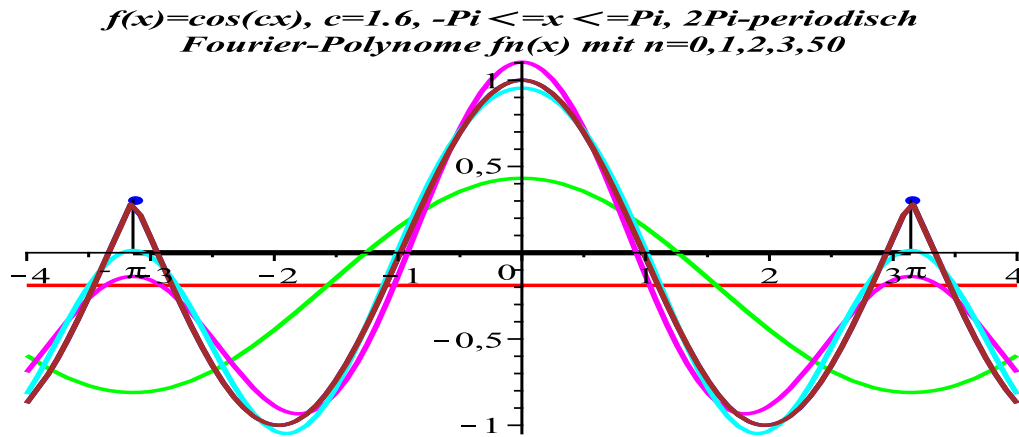


Abb. 1.17 $f(x) = \cos(cx)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x)$ ist 2π -periodisch, sowie Fourier-Polynome $f_n(x)$, $n = 0, 1, 2, 3, 50$, wobei $f_{50}(x) \approx f(x)$

Setzt man nun $x = \pi$, so erhält man unmittelbar die **Partialbruchzerlegung des Cotangens** mit $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$$\pi \cot(c\pi) = \frac{1}{c} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2c}{c^2 - k^2} = \frac{1}{c} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c+k} + \frac{1}{c-k} \right). \quad (1.25)$$

Dazu für ausgewählte Parameter c ein grafischer Vergleich von $\cot(c\pi)$ mit der Folge von Partialbruchzerlegungen

$$\varphi_n(c) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{c} + \sum_{k=1}^n \frac{2c}{c^2 - k^2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.26)$$

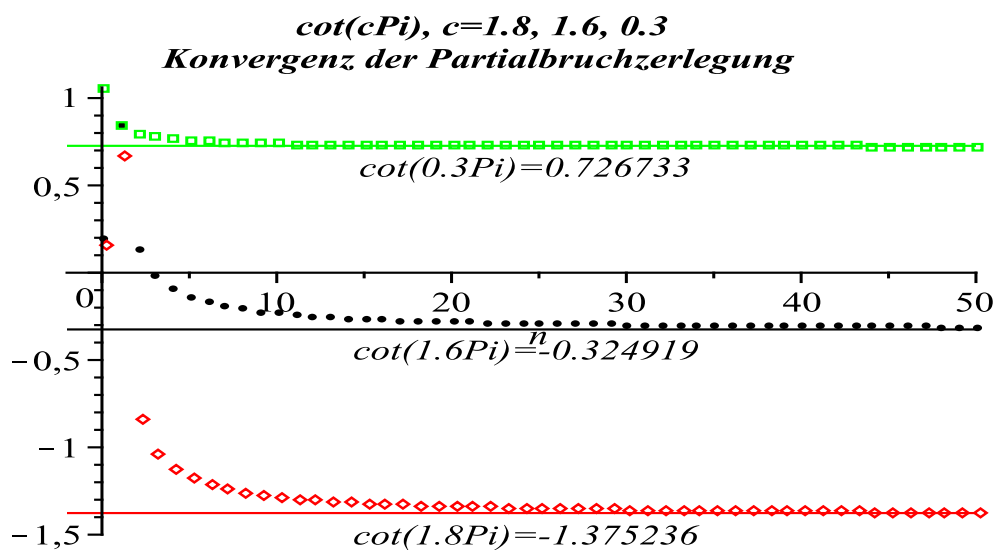


Abb. 1.18 $\cot(c\pi)$, $c = 1.6, 1.8, 0.3$, sowie $\varphi_n(c)$, $n = 0, 1, 2, \dots, 50$

Kapitel 2

Sammlung von Fourier-Reihen

Dargestellt werden zahlreiche Beispiele von periodischen Funktionen $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = f(x+T)$, mit ihren Eigenschaften, Periode T , Periodizitätsintervall $[0, T]$ bzw. $[-T/2, T/2]$, Frequenz $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$, Graphen, Fourier-Reihe und Fourier-Polynom. Zu einfachen Modifikationen der Funktionen - dazu gehören lineare Transformationen wie Streckung, Stauchung, Spiegelung, Verschiebung - lassen sich sofort auch die veränderten Fourier-Reihen angeben. Mittels geeigneter Kombinationen lassen sich neue Fourier-Reihen von Funktionen angeben.

Wenn die Funktionen nur stückweise stetig sind, dann treten an ein oder mehreren Stellen Unstetigkeiten auf. An diesen Stellen sind per Definition als Funktionswerte der Mittelwert von links- und rechtsseitigen Grenzwerten genommen worden. An diesen Stellen tritt auch das Gibbs'sche Phänomen auf.

In den Abbildungen zeigen wir die periodische Funktion zusammen mit ausgewählten Fourier-Polynomen $\Phi_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega_T x) + b_k \sin(k\omega_T x)]$ als gestrichelte oder gepunktete Kurven, wobei $n \leq 15$ ist. Bei dieser Notation sind formal alle Glieder berücksichtigt. Ein kompakte Formel davon ist $f_n(x)$. In der Unterschrift zur Abbildung benutzen wir eine Kurzform der Definition der Originalfunktion $f(x)$. Für stetige bzw. glatte Funktionen unterscheiden sich ihre Fourier-Polynome nur wenig, so dass sie graphisch manchmal nicht zu unterscheiden sind.

- (1) Dreiecksschwingung, stetig und stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$$

Als neue Bezeichnung des Fourier-Polynoms nehmen wir

$$f_n(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2},$$

so dass sich damit $f_n(x) = \Phi_{2n-1}(x) \equiv \Phi_{2n}(x)$ ergibt.

Zur vertikal gespiegelten Dreiecksschwingung $\pi - |x|$ erhält man die Fourier-Reihe

$$\pi - |x| = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}.$$

Zur gestreckten Dreiecksschwingung $\frac{\pi}{4}|x|$ ergibt sich die Fourier-Reihe

$$\frac{\pi}{4}|x| = \frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}.$$

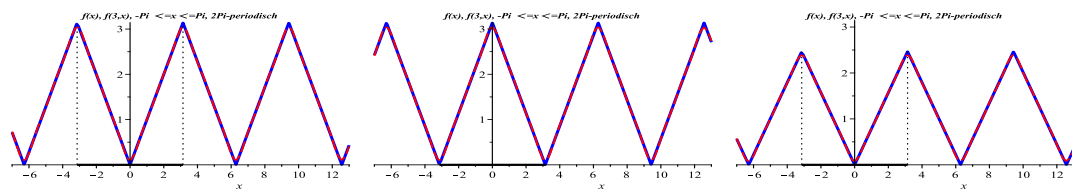


Abb. 2.1 $f(x) = |x|$, $\pi - |x|$, $\frac{\pi}{4}|x|$, $x \in [-\pi, \pi]$,
Fourier-Polynome $f_3(x) = \Phi_5(x) \equiv \Phi_6(x)$ (gestrichelte Kurven)

(2) Kippschwingung, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } -\pi < x < \pi, \\ 0, & \text{falls } x = \pm\pi, \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin(kx)}{k}$$

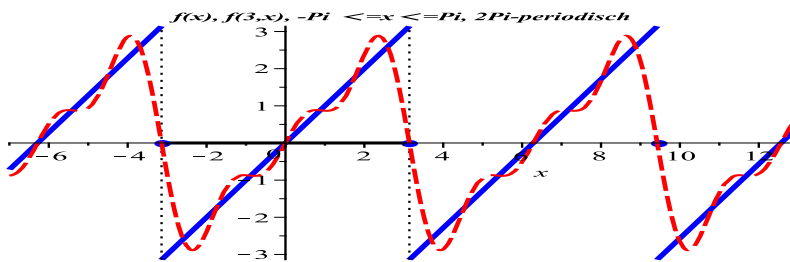


Abb. 2.2 $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$, Fourier-Polynom $f_3(x)$

(3) Kippschwingung, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } 0 < x < 2\pi, \\ \pi, & \text{falls } x = 0, 2\pi, \end{cases} \quad x \in [0, 2\pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

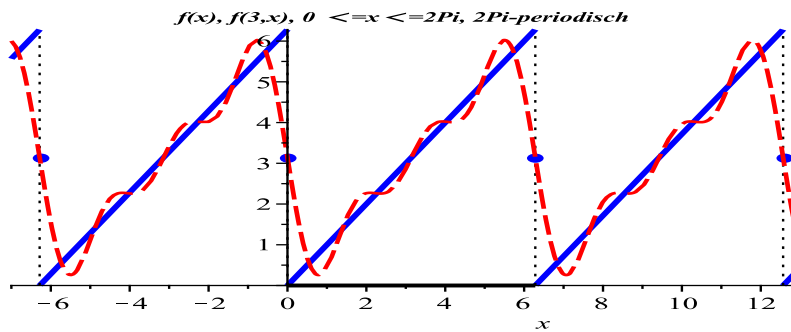


Abb. 2.3 $f(x) = x$, $x \in [0, 2\pi]$, Fourier-Polynom $f_3(x)$

Damit hat man als Sonderfälle auch die Fourier-Reihen für $x - \pi$ bzw. $-x + \pi$ auf $[0, 2\pi]$.

- (4) Dreieckschwingung, stetig und stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ -x + \pi, & \text{falls } \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2}, \\ x - 2\pi, & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [0, 2\pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$$

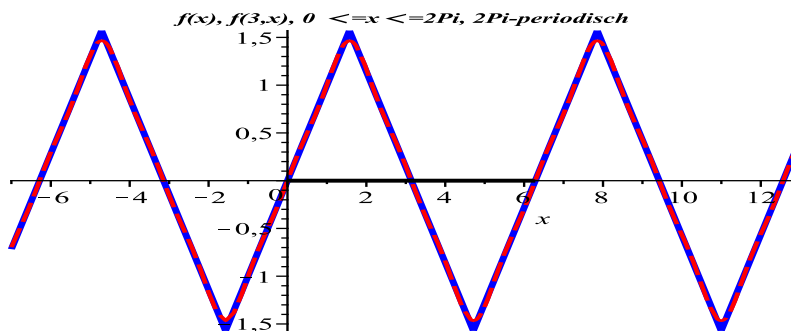


Abb. 2.4 $f(x)$ Dreieckschwingung, $x \in [0, 2\pi]$, Fourier-Polynom $f_3(x)$

- (5) Dreieckschwingung, stetig und stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi}x, & \text{falls } 0 \leq x < \frac{4\pi}{3}, \\ 4 - \frac{18}{\pi}(x - \frac{4\pi}{3}), & \text{falls } \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{5\pi}{3}, \\ -2 + \frac{6}{\pi}(x - \frac{5\pi}{3}), & \text{falls } \frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi, \end{cases} \quad x \in [0, 2\pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{4}{3} + \frac{3}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + 7 \cos\left(\frac{4\pi k}{3}\right) - 8 \cos\left(\frac{5\pi k}{3}\right) \right) \frac{\cos(kx)}{k^2} + \left(7 \sin\left(\frac{4\pi k}{3}\right) - 8 \sin\left(\frac{5\pi k}{3}\right) \right) \frac{\sin(kx)}{k^2} \right]$$

Man beachte

$$\cos\left(\frac{5\pi k}{3}\right) = (-1)^k \cos\left(\frac{4\pi k}{3}\right), \quad \sin\left(\frac{5\pi k}{3}\right) = -(-1)^k \sin\left(\frac{4\pi k}{3}\right).$$

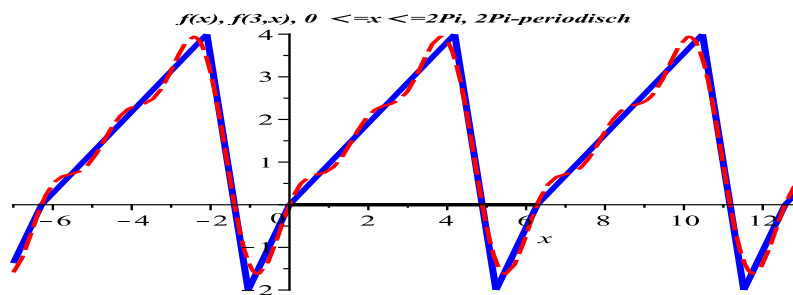


Abb. 2.5 $f(x)$ Dreieckschwingung, $x \in [0, 2\pi]$, Fourier-Polynom $f_3(x)$

(6) Dreieckimpuls, stetig und stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{6}{\pi}x - 1\right|, & \text{falls } 0 \leq x < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & \text{falls } \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{5\pi}{3}, \\ -1 + \left|\frac{6}{\pi}x - 11\right|, & \text{falls } \frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi, \end{cases} \quad x \in [0, 2\pi], \quad f(x) = f(x+2\pi)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[2 \sin\left(\frac{\pi k}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi k}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi k}{3}\right) - 2 \sin\left(\frac{11\pi k}{6}\right) \right] \frac{\sin(kx)}{k^2} \\ &= \frac{24}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{6}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{\pi k}{6}\right) \right] \frac{\sin(kx)}{k^2} \end{aligned}$$

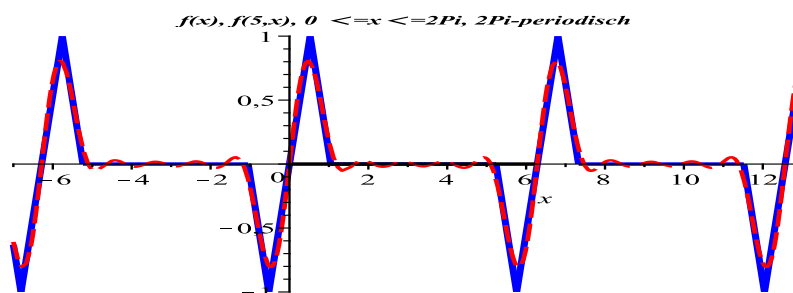


Abb. 2.6 $f(x)$ Dreieckimpuls, $x \in [0, 2\pi]$, Fourier-Polynom $f_5(x)$

(7) Parabelbögen, stetig und stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

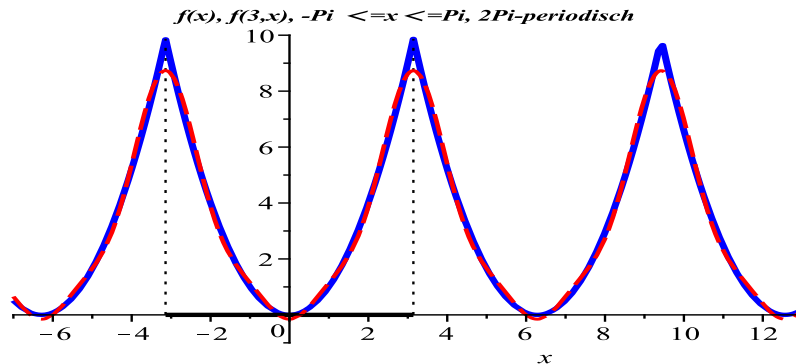


Abb. 2.7 $f(x) = x^2$, Parabelbögen, $x \in [-\pi, \pi]$, Fourier-Polynom $f_3(x)$

(8) Parabelbögen, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{falls } -\pi < x < 0, \\ x^2, & \text{falls } 0 \leq x < \pi, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\right) \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} - \frac{\sin(2kx)}{2k} \right]$$

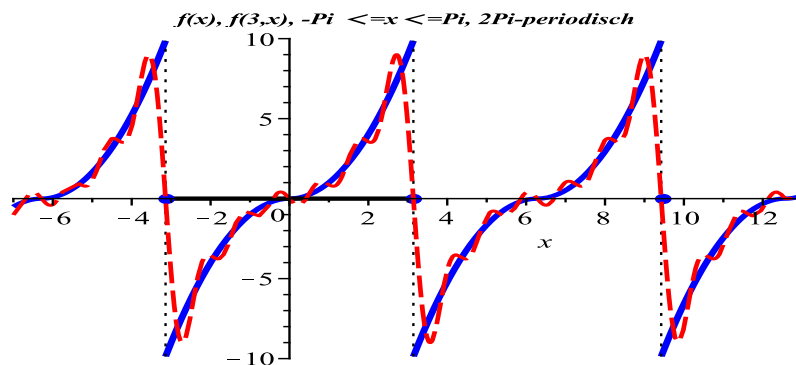


Abb. 2.8 $f(x) = \text{sign}(x)x^2$, Parabelbögen, $x \in [-\pi, \pi]$, Fourier-Polynom $f_3(x)$

(9) Parabelbögen, stetig und stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = x(\pi - x), \quad x \in [0, \pi], \quad f(x) = f(x + \pi)$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{k^2}$$

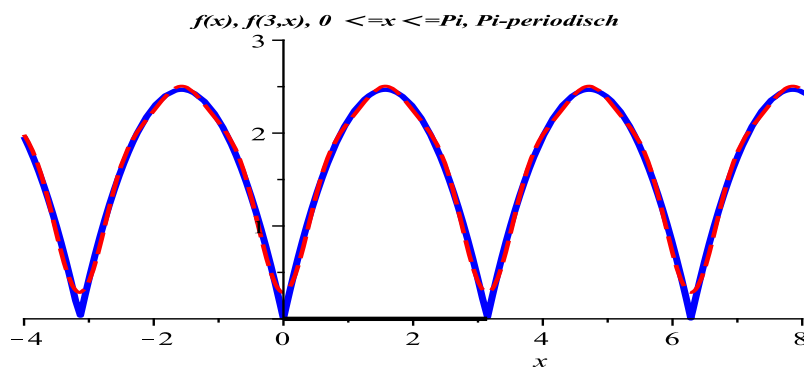


Abb. 2.9 $f(x) = x(\pi - x)$, Parabelbögen, $x \in [0, \pi]$, Fourier-Polynom $f_3(x)$

(10) Parabelbögen, stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi + x), & \text{falls } -\pi \leq x < 0, \\ x(\pi - x), & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)^3}$$

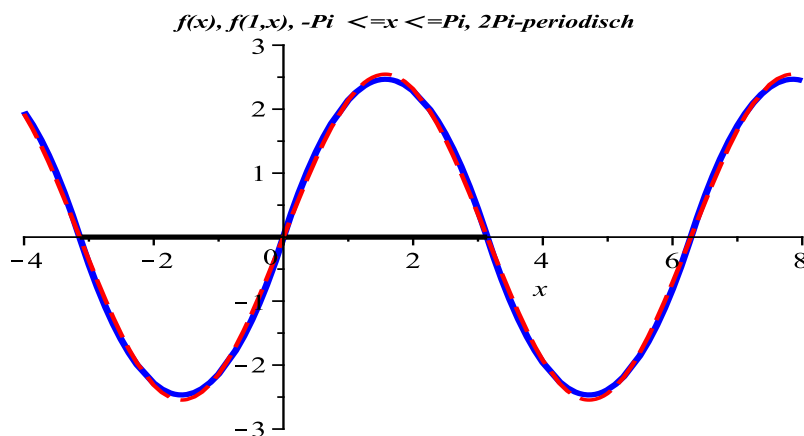


Abb. 2.10 $f(x) = x(\pi \pm x)$, Parabelbögen, $x \in [-\pi, \pi]$, Fourier-Polynom $f_1(x)$

(11) Rechteckschwingung, stückweise stetig differenzierbar

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \text{sign}(\sin(x)) \\
 &= \begin{cases} -1 & \text{für } x \in (-\pi, 0), \\ 1 & \text{für } x \in (0, \pi), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi) \\
 f(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}
 \end{aligned}$$

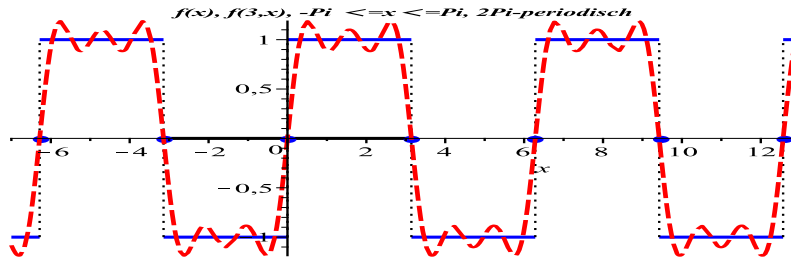


Abb. 2.11 $f(x) = \text{sign}(\sin(x))$, Rechteckschwingung, $x \in [-\pi, \pi]$,
Fourier-Polynom $f_3(x)$

(12) Rechteckimpuls, stückweise stetig differenzierbar

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2}[1 - \text{sign}(\sin(\frac{\pi x}{2}))] \\
 &= \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (-2, 0), \\ 0 & \text{für } x \in (0, 2), \\ \frac{1}{2} & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [-2, 2], \quad f(x) = f(x + 2) \\
 f(x) &= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi x/2)}{2k-1}
 \end{aligned}$$

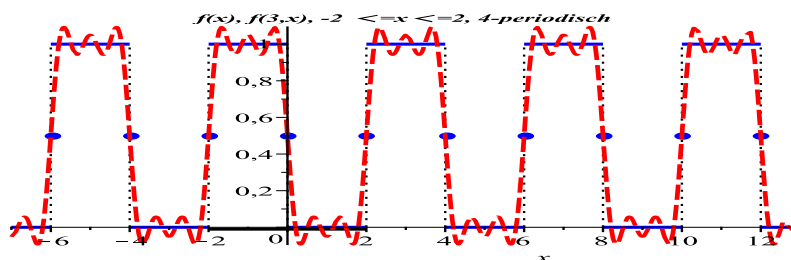


Abb. 2.12 $f(x) = \frac{1}{2}[1 - \text{sign}(\sin(\frac{\pi x}{2}))]$, Rechteckimpuls, $x \in [-\pi, \pi]$,
Fourier-Polynom $f_3(x)$

(13) Rechteckschwingung, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \text{sign}(\cos(x))$$

$$= \begin{cases} -1 & \text{für } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ 1 & \text{für } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ -1 & \text{für } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos((2k-1)x)}{2k-1}$$

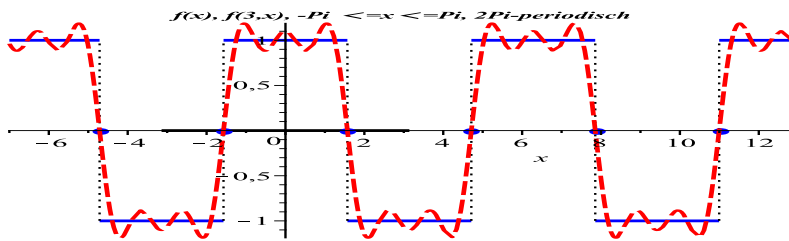


Abb. 2.13 $f(x) = \text{sign}(\cos(x))$, Rechteckschwingung, $x \in [-\pi, \pi]$,
Fourier-Polynom $f_3(x)$

(14) Schwingung, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi}|x| & \text{für } |x| < \frac{\pi}{4}, \\ 1 & \text{für } \frac{\pi}{4} \leq |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi, \\ \frac{1}{2} & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{3}{8} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[k\pi \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + 4 \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) - 4 \right] \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

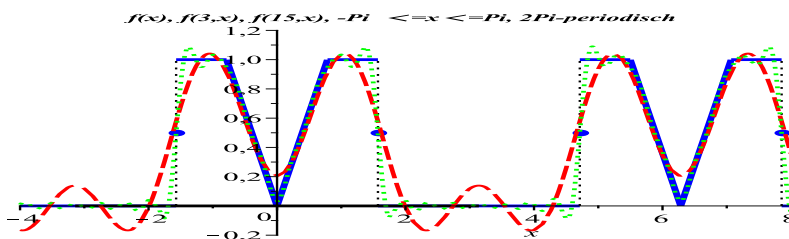


Abb. 2.14 $f(x)$ Schwingung, $x \in [-\pi, \pi]$,
Fourier-Polynome $f_3(x)$, $f_{15}(x)$ (gepunktete Kurve)

(15) Treppenfunktion, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{für } x = 0, 2\pi, \\ x - \frac{1}{2} & \text{für } x = 1, 2, \dots, 6, \quad x \in [0, 2\pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi) \\ [x] & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{12\pi - 21}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sin(k) [-1 - 4 \cos(k) \right. \\ & + 8 \cos^2(k) + 24 \cos^3(k) - 16 \cos^4(k) - 32 \cos^5(k)] \frac{\cos(kx)}{k} \\ & + [-7 + 3 \cos(k) + 12 \cos^2(k) - 16 \cos^3(k) \\ & \left. - 40 \cos^4(k) + 16 \cos^5(k) + 32 \cos^6(k)] \frac{\sin(kx)}{k} \right] \end{aligned}$$

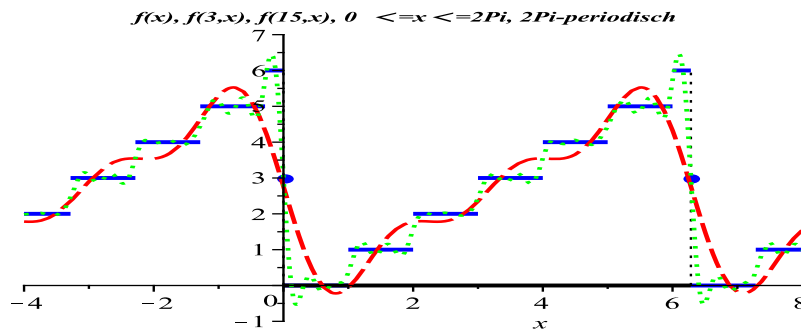


Abb. 2.15 $f(x) = [x]$, Treppenfunktion, $x \in [0, 2\pi]$,
Fourier-Polynome $f_3(x)$, $f_{15}(x)$ (gepunktete Kurve)

(16) Treppenfunktion, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ -\frac{3}{4} & \text{für } x = -\frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{2} & \text{für } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0), \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ \frac{3}{4} & \text{für } x = \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{für } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - 2(-1)^k + \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right] \frac{\sin(kx)}{k}$$

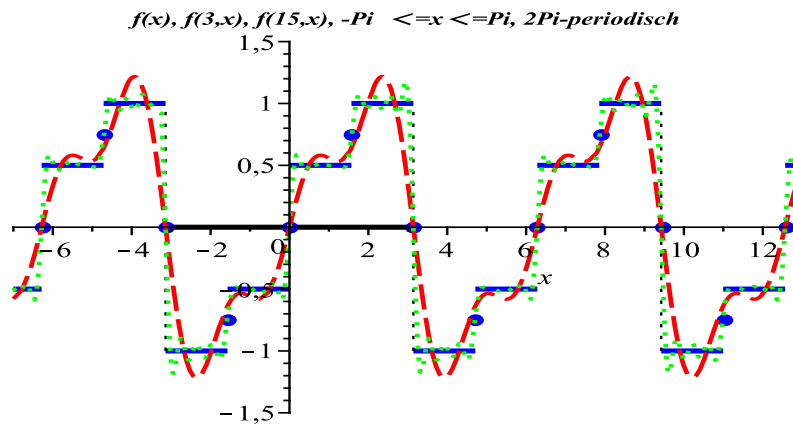


Abb. 2.16 $f(x)$ Treppenfunktion, $x \in [-\pi, \pi]$,
Fourier-Polynome $f_3(x)$, $f_{15}(x)$ (gepunktete Kurve)

(17) Treppenfunktion, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } x \in (0, \frac{\pi}{4}), \\ \frac{\pi}{4} & \text{für } x = \frac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{für } x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}), \\ -\frac{\pi}{4} & \text{für } x = \frac{7\pi}{4}, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x \in (\frac{7\pi}{4}, 2\pi) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [0, 2\pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) \right] \frac{\sin(kx)}{k}$$

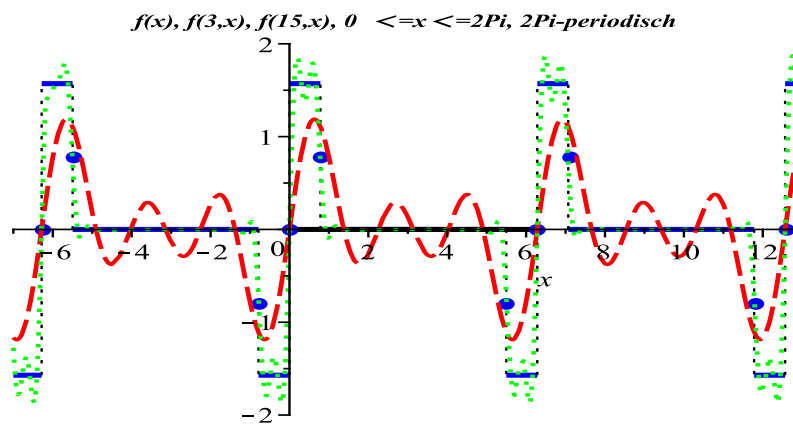


Abb. 2.17 $f(x)$ Treppenfunktion, $x \in [0, 2\pi]$,
Fourier-Polynome $f_3(x)$, $f_{15}(x)$ (gepunktete Kurve)

(18) Treppenfunktion, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}), \\ 1 & \text{für } x = -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) \frac{\cos(kx)}{k}$$

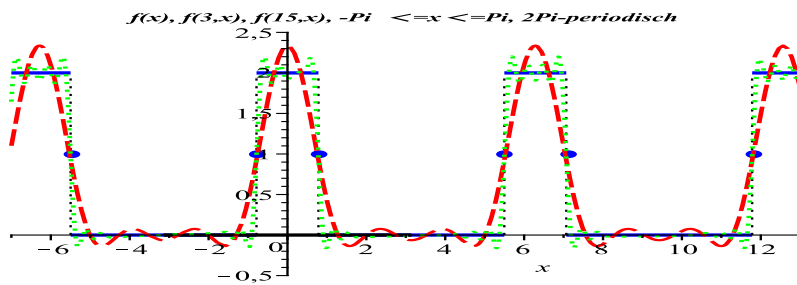


Abb. 2.18 $f(x)$ Treppenfunktion, $x \in [-\pi, \pi]$,
Fourier-Polynome $f_3(x)$, $f_{15}(x)$ (gepunktete Kurve)

(19) Treppenfunktion, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \in (-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}), \\ 1 & \text{für } x = -\frac{T}{4}, \frac{T}{4}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}], \quad f(x) = f(x + T)$$

$$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos((2k-1)2\pi x/T)}{2k-1}$$

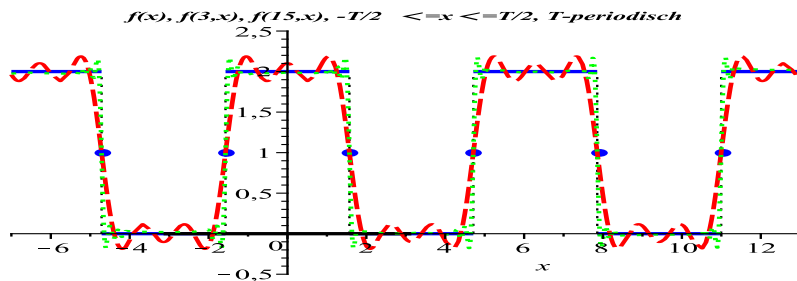


Abb. 2.19 $f(x)$ Treppenfunktion, $x \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, $T = 2\pi$,
Fourier-Polynome $f_3(x)$, $f_{15}(x)$ (gepunktete Kurve)

Mit $T = 2\pi$ kommt man nach Subtraktion von 1 zum Ergebnis aus Punkt (13).

(20) Alternierende Funktion, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} -x - \pi & \text{für } x \in (-\pi, 0), \\ x & \text{für } x \in (0, \pi), \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = \pm\pi, \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$

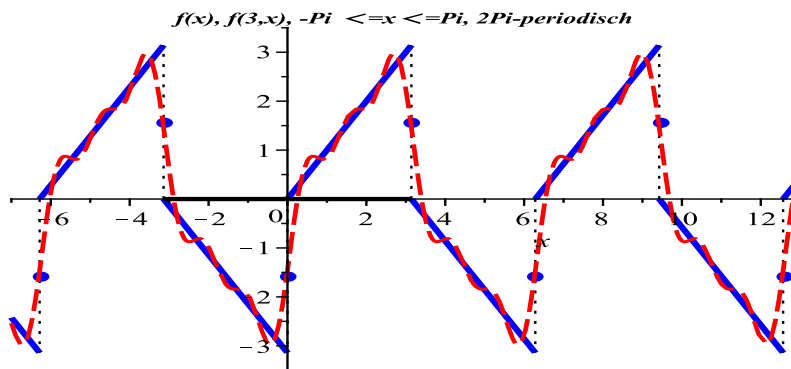


Abb. 2.20 $f(x)$ alternierende Funktion, $x \in [-\pi, \pi]$, Fourier-Polynom $f_3(x)$

(21) Alternierende Funktion, stetig und stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} -x - \pi & \text{für } x \in [-\pi, -\frac{3\pi}{4}), \\ \frac{x}{3} & \text{für } x \in [-\frac{3\pi}{4}, 0), \\ x & \text{für } x \in [0, \frac{\pi}{4}), \\ -\frac{1}{3}(x - \pi) & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{4}{3\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(3\pi(2k-1)/4) - \cos(\pi(2k-1)/4)}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x) \\ &\quad + \frac{4}{3\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(3\pi(2k-1)/4) + \sin(\pi(2k-1)/4)}{(2k-1)^2} \sin((2k-1)x) \\ &= \frac{4}{3\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \left[-\left(1 - (-1)^{[k/2]} \sqrt{2}\right) \cos((2k-1)x) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{[(k-1)/2]} \sqrt{2} \sin((2k-1)x) \right] \end{aligned}$$

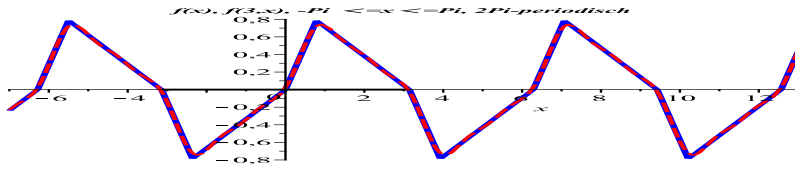


Abb. 2.21 $f(x)$ alternierende Funktion, $x \in [-\pi, \pi]$, Fourier-Polynom $f_3(x)$

(22) Alternierende Funktion, stetig und stückweise stetig differenzierbar, ungerade

$$f(x) = \begin{cases} -x - \pi & \text{für } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ x & \text{für } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ -x + \pi & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k^2} \sin(kx) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$$

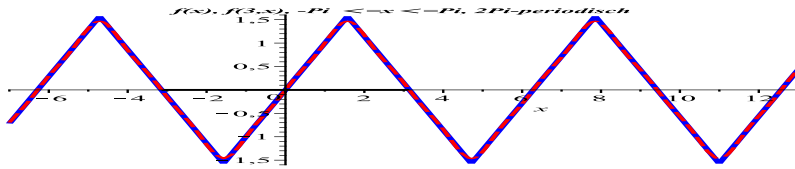


Abb. 2.22 $f(x)$ alternierende Funktion, $x \in [-\pi, \pi]$, Fourier-Polynom $f_3(x)$

(23) Alternierende Funktion, stetig und stückweise stetig differenzierbar, gerade

$$f(x) = \begin{cases} -x - \pi & \text{für } x \in [-\pi, -\frac{3\pi}{4}), \\ x + \frac{\pi}{2} & \text{für } x \in [-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}), \\ |x| & \text{für } x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}), \\ -x + \frac{\pi}{2} & \text{für } x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}), \\ x - \pi & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(3\pi(2k-1)/4) - \cos(\pi(2k-1)/4)}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x) \\ &= -\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - (-1)^{[k/2]} \sqrt{2}\right) \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} \end{aligned}$$

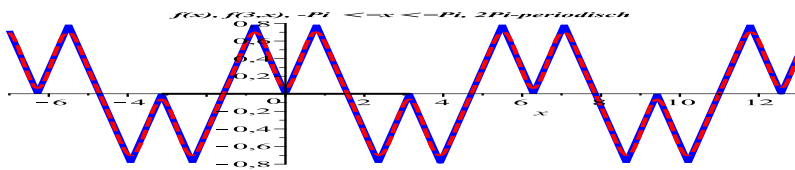


Abb. 2.23 $f(x)$ alternierende Funktion, $x \in [-\pi, \pi]$, Fourier-Polynom $f_3(x)$

(24) Trapezkurve (gleichsch. Trapez), stetig und stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\varphi} & \text{für } x \in [0, \varphi), \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{für } x \in [\varphi, \pi - \varphi), \\ \frac{\pi - x}{\varphi} & \text{für } x \in [\pi - \varphi, \pi + \varphi), \\ -1 & \text{für } x \in [\pi + \varphi, 2\pi - \varphi), \\ \frac{x - 2\pi}{\varphi} & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [0, 2\pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin((2k-1)\varphi) \frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$$

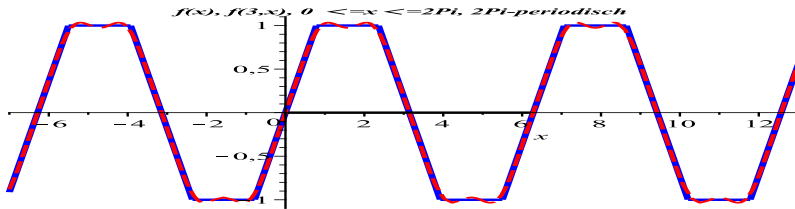


Abb. 2.24 $f(x)$ Trapezkurve, $x \in [0, 2\pi]$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, Fourier-Polynom $f_3(x)$

(25) Trapezimpuls (gleichsch. Trapez), stetig und stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-\xi}{\varphi-\xi} & \text{für } x \in [\xi, \varphi), \quad 0 < \xi < \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{für } x \in [\varphi, \pi - \varphi), \\ \frac{\pi - \xi - x}{\varphi - \xi} & \text{für } x \in [\pi - \varphi, \pi - \xi), \\ \frac{\pi + \xi - x}{\varphi - \xi} & \text{für } x \in [\pi + \xi, \pi + \varphi), \\ -1 & \text{für } x \in [\pi + \varphi, 2\pi - \varphi), \\ \frac{x - 2\pi + \xi}{\varphi - \xi} & \text{für } x \in [2\pi - \varphi, 2\pi - \xi), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [0, 2\pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi(\varphi - \xi)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sin((2k-1)\varphi) - \sin((2k-1)\xi) \right] \frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$$

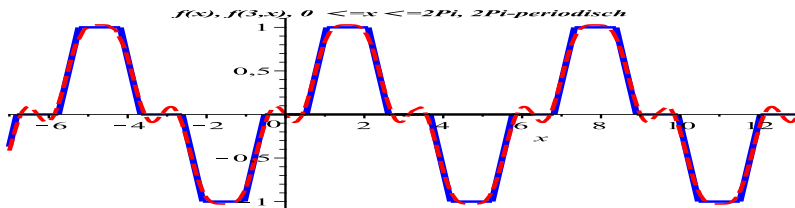


Abb. 2.25 $f(x)$ Trapezimpuls, $x \in [-\pi, \pi]$, $\xi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, Fourier-Polynom $f_3(x)$

(26) Kippschwingung, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{\pi}x, & \text{falls } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \pi, \end{cases} \quad x \in [0, \pi], \quad f(x) = f(x + \pi)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2kx)}{k}$$

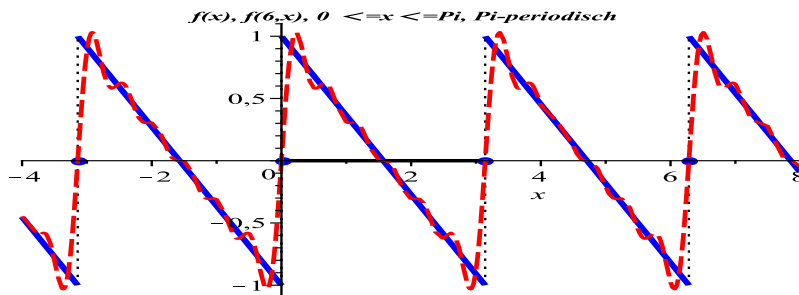


Abb. 2.26 $f(x) = 1 - \frac{2}{\pi}x$, Kippschwingung, $x \in [0, \pi]$,
Fourier-Polynom $f_6(x)$

(27) Kippschwingung, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} c(1 - \frac{2}{T}x), & \text{falls } 0 < x < T, \\ 0, & \text{falls } x = 0, T, \end{cases} \quad x \in [0, T], \quad f(x) = f(x + T), \quad c > 0$$

$$f(x) = \frac{4c}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi x/T)}{k}$$

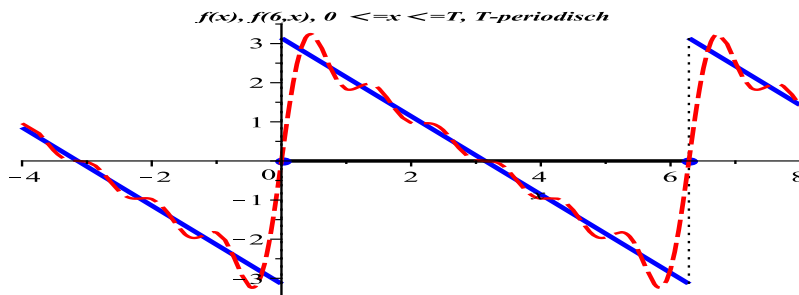


Abb. 2.27 $f(x) = c(1 - \frac{2}{T}x)$, Kippschwingung, $x \in [0, T]$, $T = 2\pi$, $c = \pi$,
Fourier-Polynom $f_6(x)$

Mit $c = \pi$ und $T = 2\pi$ kommt man zu einem Sonderfall aus Punkt (3).
Mit $c = 1$ und $T = \pi$ ist man bei Punkt (26).

(28) Kippschwingung, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi}x, & \text{falls } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{falls } x = \frac{\pi}{2}, \\ \frac{4}{\pi}(x - \pi), & \text{falls } \frac{\pi}{2} < x < 2\pi, \\ 2, & \text{falls } x = 0, 2\pi, \end{cases} \quad x \in [0, 2\pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\sin(k\pi/2) \cos(kx) - (\cos(k\pi/2) + 1) \sin(kx) \right]$$

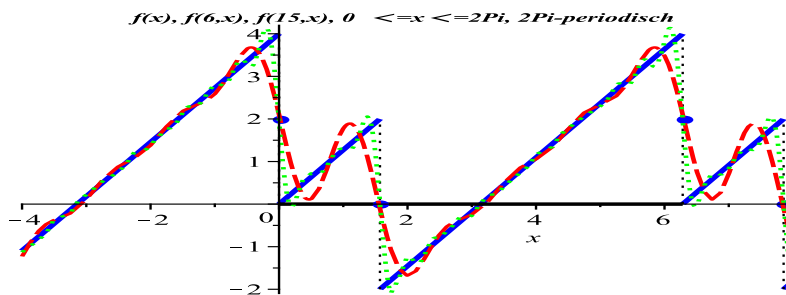


Abb. 2.28 $f(x)$ Kippschwingung, $x \in [0, 2\pi]$,
Fourier-Polynome $f_6(x)$, $f_{15}(x)$

(29) Trendfunktion, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{falls } 0 < x < 2\pi, \\ \frac{1}{2}(1 + e^{-2\pi}), & \text{falls } x = 0, 2\pi, \end{cases} \quad x \in [0, 2\pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2\pi} + \frac{1 - e^{-2\pi}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + k^2} \left[\cos(kx) + k \sin(kx) \right]$$

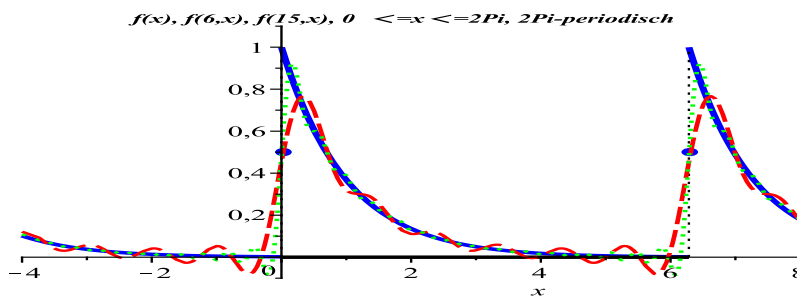


Abb. 2.29 $f(x) = e^{-x}$, Trendfunktion, $x \in [0, 2\pi]$,
Fourier-Polynome $f_3(x)$, $f_{15}(x)$

- (30) Gleichgerichteter Sinus, Zweiweggleichrichtung, stetig und stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = |\sin(x)|, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}$$

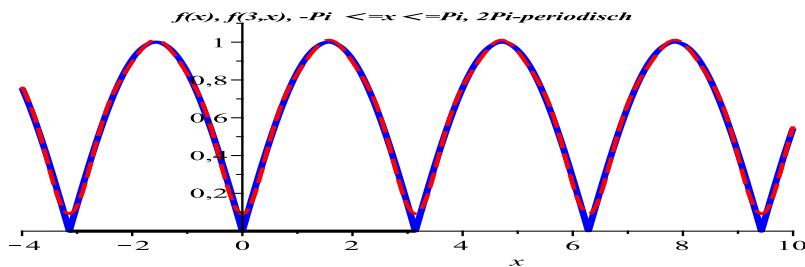


Abb. 2.30 $f(x) = |\sin(x)|$, Zweiweggleichrichtung, $x \in [-\pi, \pi]$,
Fourier-Polynom $f_3(x)$

Mit der periodischen Fortsetzung von $f(x) = \sin(x)$ auf $[0, T] = [0, \pi]$ gelangt man zum selben Ergebnis.

- (31) Gleichgerichteter Cosinus, Zweiweggleichrichtung, stetig und stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = |\cos(x)|, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}$$

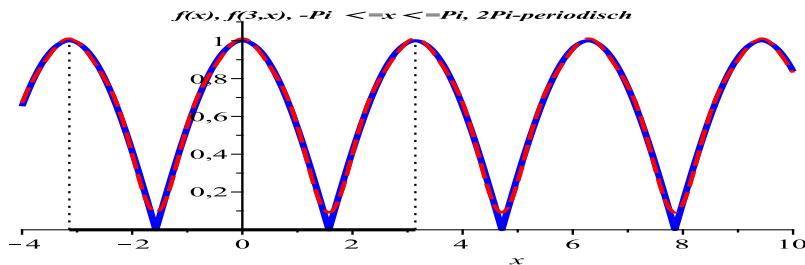


Abb. 2.31 $f(x) = |\cos(x)|$, Zweiweggleichrichtung, $x \in [-\pi, \pi]$,
Fourier-Polynom $f_3(x)$

Mit der periodischen Fortsetzung von $f(x) = \cos(x)$ auf $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gelangt man zum selben Ergebnis.

(32) Sinusimpuls, Einweggleichrichtung, stetig und stückweise stetig differenzierbar

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \max_x \{\sin(x), 0\} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-\pi, 0], \\ \sin(x) & \text{für } x \in (0, \pi], \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi) \\
 f(x) &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}
 \end{aligned}$$

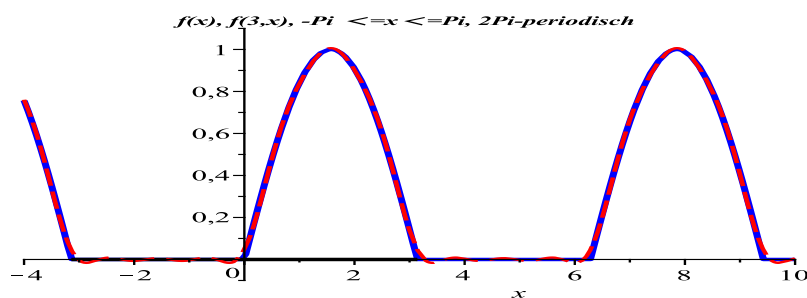


Abb. 2.32 $f(x) = \max_x \{\sin(x), 0\}$, Sinusimpuls, $x \in [-\pi, \pi]$,
Fourier-Polynom $f_3(x)$

(33) Cosinusimpuls, Einweggleichricht., stetig und stückweise stetig differenzierbar

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \max_x \{\cos(x), 0\} \\
 &= \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi) \\
 f(x) &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}
 \end{aligned}$$

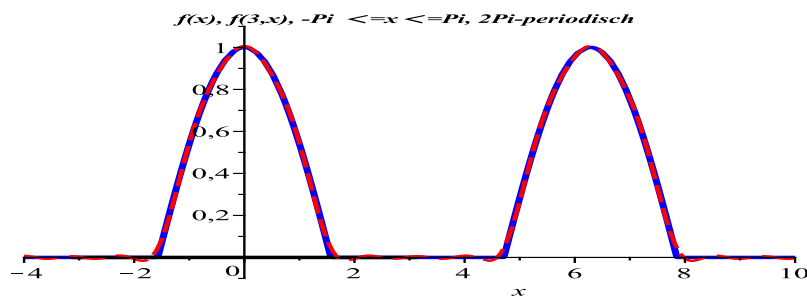


Abb. 2.33 $f(x) = \max_x \{\cos(x), 0\}$, Cosinusimpuls, $x \in [-\pi, \pi]$,
Fourier-Polynom $f_3(x)$

(34) Halber Sinus, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \sin(x), \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad f(x) = f(x + \pi), \quad f(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2k \sin(2kx)}{4k^2 - 1}$$

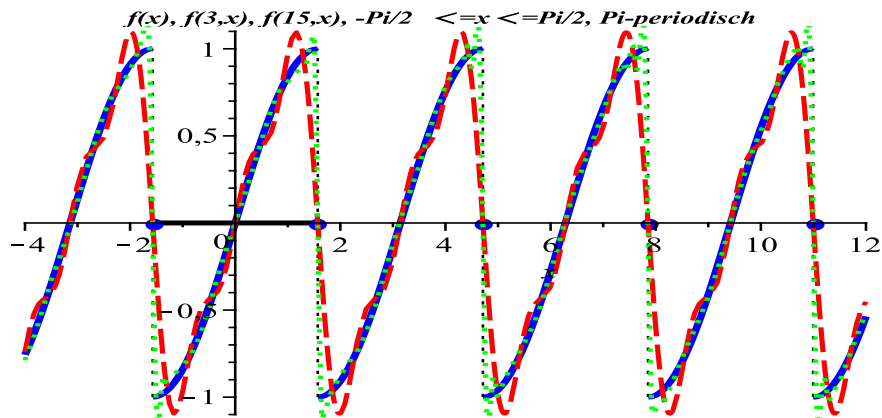


Abb. 2.34 $f(x) = \sin(x)$, halber Sinus, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
Fourier-Polynome $f_3(x)$, $f_{15}(x)$

(35) Halber Cosinus, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \cos(x), \quad x \in [0, \pi], \quad f(x) = f(x + \pi), \quad f(0) = f(\pi) = 0$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k \sin(2kx)}{4k^2 - 1}$$

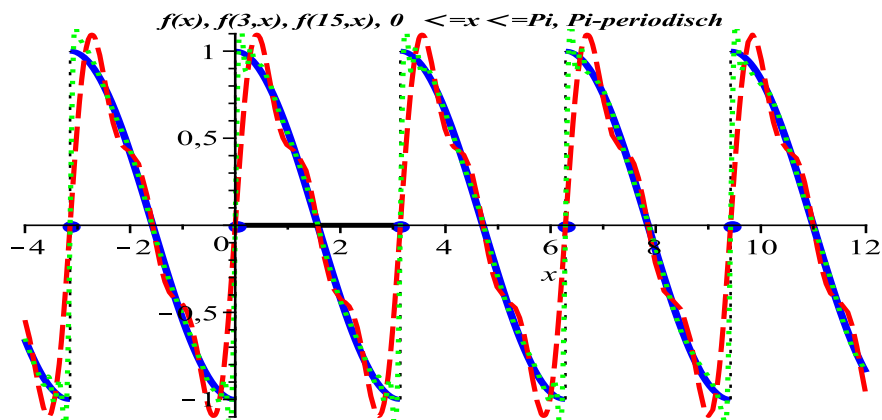


Abb. 2.35 $f(x) = \cos(x)$, halber Cosinus, $x \in [0, \pi]$,
Fourier-Polynome $f_3(x)$, $f_{15}(x)$

(36) Funktion, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = x \cos(x), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi), \quad f(\pm\pi) = 0$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \sin(x) + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{2k \sin(kx)}{k^2 - 1}$$

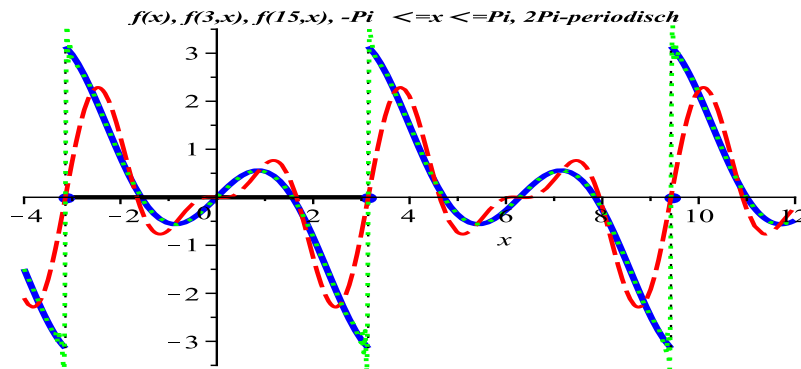


Abb. 2.36 $f(x) = x \cos(x)$, Funktion mit Cosinus, $x \in [-\pi, \pi]$,
Fourier-Polynome $f_3(x)$, $f_{15}(x)$

(37) Funktion, stetig und stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = x(1 + \cos(x)), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{3}{2} \sin(x) + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \left[\frac{2}{k} - \frac{2k}{k^2 - 1} \right] \sin(kx)$$

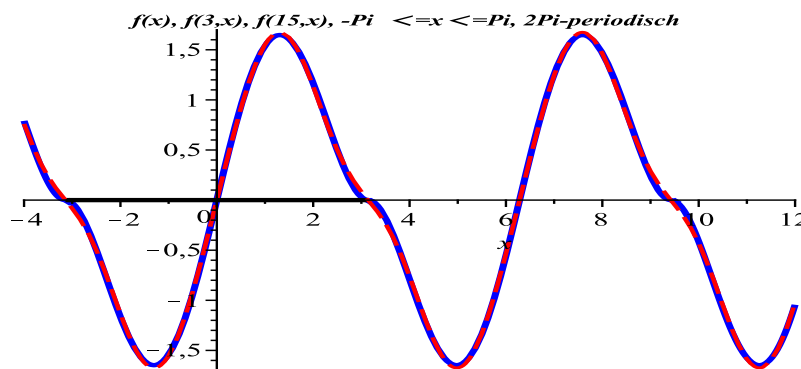


Abb. 2.37 $f(x) = x(1 + \cos(x))$, Funktion mit Cosinus, $x \in [-\pi, \pi]$,
Fourier-Polynom $f_3(x)$

Die Punkte (2) und (36) führen auch zu diesem Ergebnis.

(38) Funktion mit Sinus, stückweise stetig differenzierbar

$$f(x) = \sin(cx), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi), \quad f(\pm\pi) = 0,$$

c nicht ganzzahlig

$$f(x) = \frac{2 \sin(c\pi)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k \sin(kx)}{k^2 - c^2}$$

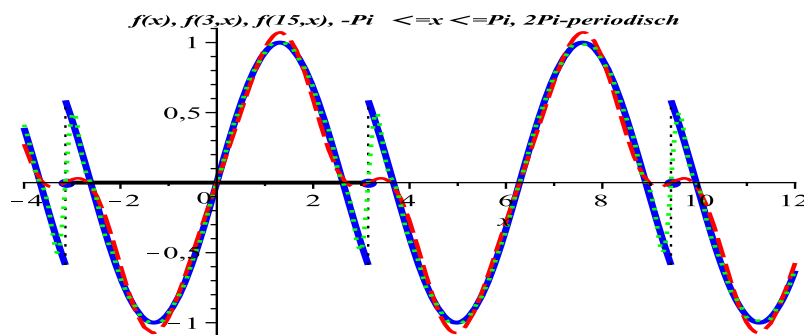


Abb. 2.38 $f(x) = \sin(cx)$, $x \in [-\pi, \pi]$, $c = 1.2$ nicht ganzzahlig,
Fourier-Polynom $f_3(x)$

Für $c = \frac{1}{2}$ haben wir dieselben Fourier-Koeffizienten wie im Punkt (34).

(39) Gleichgerichteter Drehstrom, stetig und stückweise stetig differenzierbar

$$\begin{aligned} f(x) &= \max_x \left\{ \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \cos(x - \pi) \right\} \\ &= \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right), \quad x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right], \quad f(x) = f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(3kx)}{9k^2 - 1} \right)$$

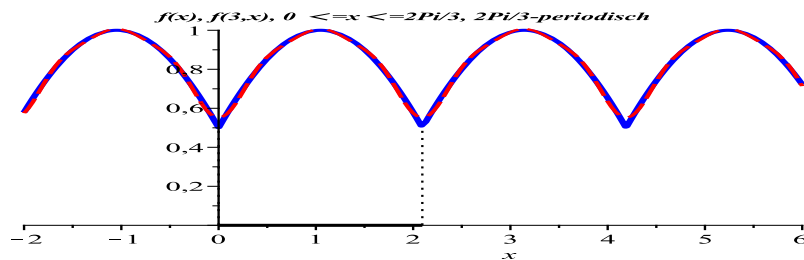


Abb. 2.39 $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, gleichgerichteter Drehstrom, $x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$,
Fourier-Polynom $f_3(x)$

(40) Stetige und nirgends differenzierbare Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x), \quad 0 < a < 1, \quad b \in \mathbb{N}, \quad b > 0, \quad ab > 1 + \frac{3\pi}{2},$$

$$x \in [-1, 1], \quad f(x) = f(x+2), \quad (a, b) = \left(\frac{1}{3}, 12\right), \quad \left(\frac{1}{2}, 13\right)$$

Die Funktion hat schon die Gestalt einer Fourier-Reihe.

Der Plot der Funktion $f(x)$ ist problematisch und manchmal auch sehr zeitaufwendig wegen ihrer extrem starken Schwingungen. Ein guter "Ersatz" als Plot wäre dafür das punktweise ausgewertete Fourier-Polynom $f_6(x)$. Zum Vergleich mit $f(x)$ verwenden wir in den folgenden beiden Abbildungen das Fourier-Polynom $f_2(x)$.

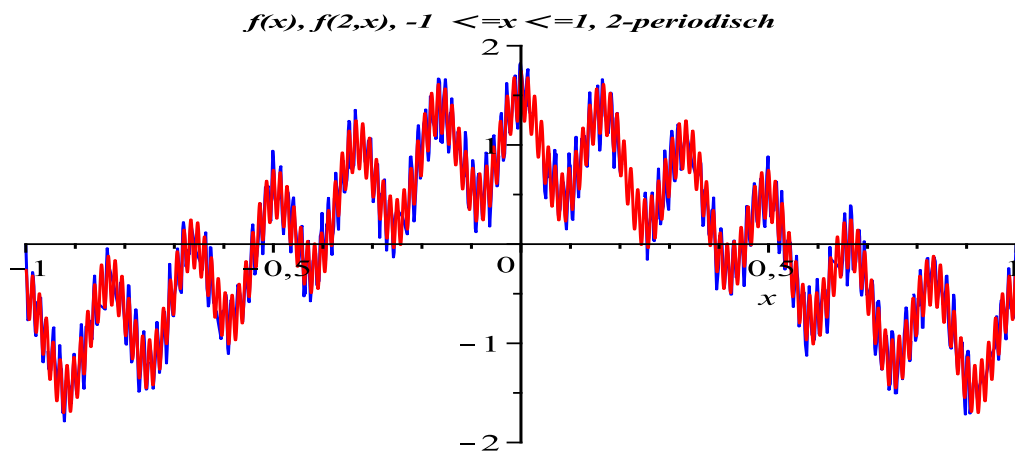


Abb. 2.40 $f(x)$ stetige und nirgends differenzierbare Funktion, $x \in [-1, 1]$, $(a, b) = \left(\frac{1}{3}, 12\right)$, Fourier-Polynom $f_2(x)$

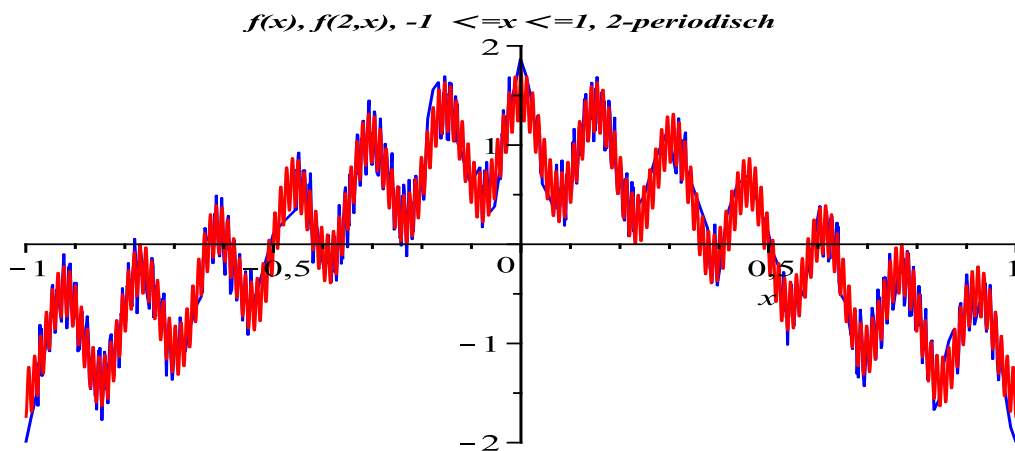


Abb. 2.41 $f(x)$ stetige und nirgends differenzierbare Funktion, $x \in [-1, 1]$, $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, 13\right)$, Fourier-Polynom $f_2(x)$

(41) Stetige und nirgends differenzierbare Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \sin(b^k x), \quad 0 < a < 1, \quad b \in \mathbb{N}, \quad b > 0,$$

$$x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = f(x + 2\pi), \quad (a, b) = \left(\frac{2}{3}, 2\right), \left(\frac{1}{4}, 16\right), \left(\frac{1}{10}, 101\right)$$

Die Funktion hat schon die Gestalt einer Fourier-Reihe.

Auch hier ist der Plot der Funktion $f(x)$ problematisch wegen ihres extremen Schwingungsverhaltens. Deshalb wird sie "ersatzweise" durch das punktweise ausgewertete Fourier-Polynom $f_{10}(x)$ dargestellt.

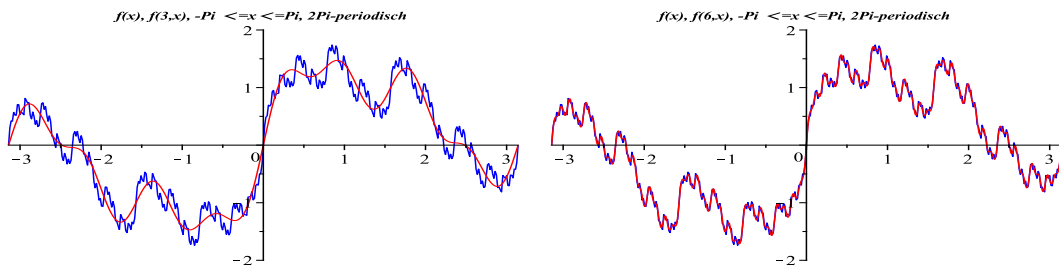


Abb. 2.42 $f(x)$ stetige und nirgends differenzierbare Funktion, $x \in [-\pi, \pi]$, $(a, b) = (\frac{2}{3}, 2)$, Fourier-Polynome $f_3(x)$, $f_6(x)$

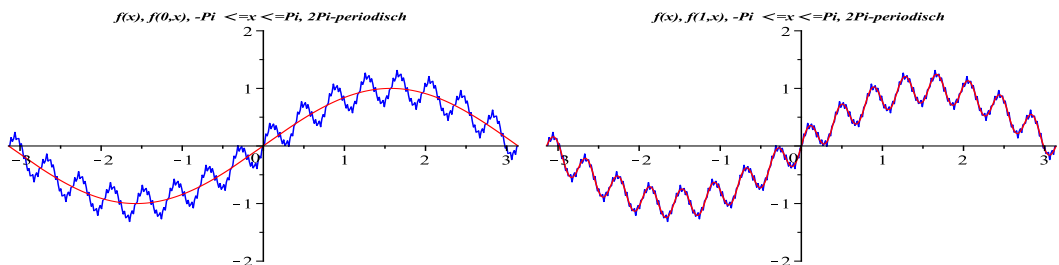


Abb. 2.43 $f(x)$ stetige und nirgends differenzierbare Funktion, $x \in [-\pi, \pi]$, $(a, b) = (\frac{1}{4}, 16)$, Fourier-Polynom $f_0(x)$, $f_1(x)$

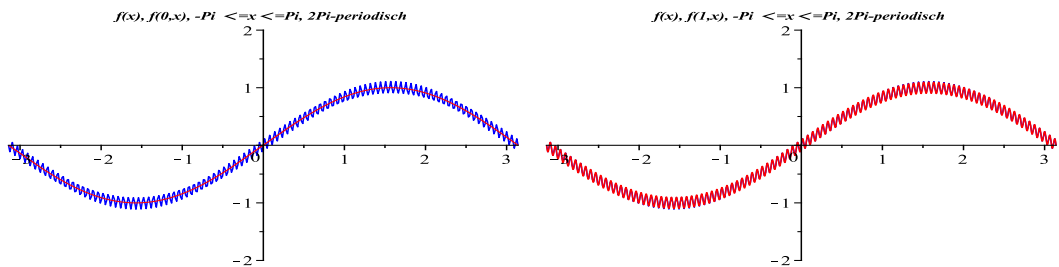


Abb. 2.44 $f(x)$ stetige und nirgends differenzierbare Funktion, $x \in [-\pi, \pi]$, $(a, b) = (\frac{1}{10}, 101)$, Fourier-Polynom $f_0(x)$, $f_1(x)$

(42) Heaviside-Funktion, stückweise stetig differenzierbare Funktion

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$



Abb. 2.45 $h(t)$ Heaviside-Funktion, $t \in [-2, 2]$,
mit Option `discont=false` (links) und `discont=true`

Wir ergänzen an den Sprungstellen die Mittelwerte.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{für } x \in (-1, 0), \\ \frac{1}{2} & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [-1, 1], \quad f(x) = f(x+2)$$

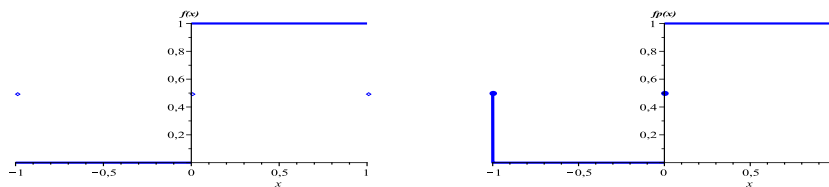


Abb. 2.46 $f(x)$, $t \in [-1, 1]$, mit Option `discont=true` (linker Graph),
als periodische Fortsetzung, $t \in [-1, 1]$, mit Option `discont=true`
und künstlicher Ergänzung der Mittelwerte an den Sprungstellen

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi x)}{2k-1}$$

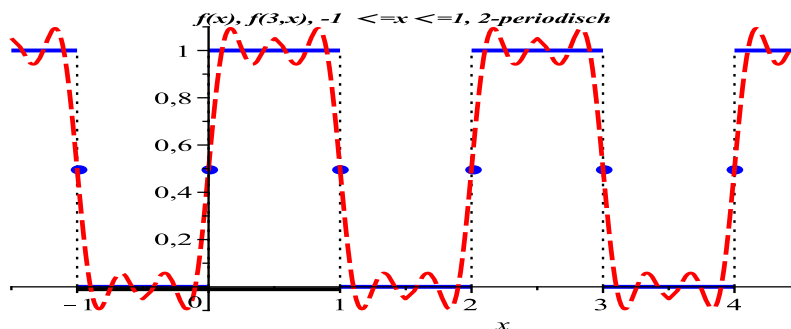


Abb. 2.47 $f(x)$ Heaviside-Funktion, $x \in [-1, 1]$, Fourier-Polynom $f_3(x)$

Literaturverzeichnis

- [1] BUTZ, T.: *Fouriertransformation für Fußgänger*. Stuttgart B.G. Teubner 2. Aufl., Stuttgart 2000.
- [2] LIDTHILL, M.J.: *Einführung in die Theorie der Fourieranalysis und der verallgemeinerten Funktionen*. Nr. 139 in BI Hochschultaschenbücher, Bibliographisches Institut 1966.
- [3] NEUNDORF, W.: *Numerische Mathematik*. Vorlesungen, Übungen, Algorithmen und Programme. Shaker Verlag, Aachen 2002.
- [4] MAESS, G.: *Vorlesungen über Numerische Mathematik I, II*. Akademie-Verlag Berlin 1984, 1988.
- [5] PETERS, T.: *Fourier-Reihen*. www.mathe-seiten.de 2004.
- [6] WERNER, W.: *Mathematik lernen mit Maple*. Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium. Band 1, 2. dpunkt-Verlag, Heidelberg 1996, 1998.
- [7] NEUNDORF, W.: π und e . Preprint M 06/04 IfMath der TU Ilmenau, März 2004.
- [8] ABRAMOWITZ, M. und I. A. STEGUN: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover Publications Inc., New York, 1992.
- [9] GRADSTEIN, I. S. und I. M. RYSHIK: *Tablicy integralow, summ, rjadow i proiswedenij*. Izdatelstwo Nauka Moskwa 1971.

Anschrift:

Dr. rer. nat. habil. Werner Neundorf
Technische Universität Ilmenau, Institut für Mathematik
PF 10 05 65
D - 98684 Ilmenau

E-mail : werner.neundorf@tu-ilmenau.de
Homepage : <http://www.tu-ilmenau.de/fakmn/neundorf.html>